

**T H È S E**

pour obtenir le grade

**DOCTEUR EN SCIENCE**

*Ecole Doctorale : Information, Structures, Systèmes*

*Formation Doctorale : BIOSTATISTIQUE*

**Filtrage non linéaire par noyaux de convolution**  
**Application à un procédé de dépollution biologique**

*par*

**Vivien ROSSI**

soutenue publiquement le **2 décembre 2004** devant le jury composé de :

MM.	P. DEL MORAL	Professeur Université de Nice	Examineur
	L. DEVROYE	Professeur Université McGill	Rapporteur
	G. DUCHARME	Professeur Université Montpellier II	Président
	F. LE GLAND	Dir. de recherche IRISA/INRIA Rennes	Rapporteur
	B. PORTIER	Maître de Conf. Université Paris-Sud	Membre invité
	G. TRYSTRAM	Professeur ENSIA Massy	Rapporteur
	J.P. STEYER	Dir. de recherche INRA Narbonne	Membre invité
	J.P. VILA	Dir. de recherche INRA Montpellier	Directeur de Thèse



# Remerciements

Après l'obtention de la maîtrise, ayant choisi de suivre la voie de la recherche, j'ai rencontré Jean-Pierre Vila afin de m'informer plus amplement sur ce métier. Il m'a accordé sa confiance en me proposant l'étude d'un premier projet. Il me l'a renouvelée en acceptant d'encadrer mon stage de DEA et surtout en me proposant ce sujet de thèse. Ce fut pour moi un plaisir de travailler sous sa direction durant ces trois années. Il m'a transmis sa rigueur scientifique et son ouverture d'esprit. Je reste impressionné par l'étendue de ses connaissances, tant théoriques qu'appliquées. Jean-Pierre Vila m'a laissé une grande liberté pour aborder ce travail. Ses conseils et son soutien ont été particulièrement précieux pour son accomplissement. J'espère que notre collaboration ne s'arrêtera pas avec cette thèse.

Merci infiniment à Luc Devroye, François Le Gland et Gilles Trystram qui ont donné leur accord, malgré un emploi du temps que je devine accablant, pour assumer la tâche ingrate de rapporteur. Tous trois, dans nos échanges de travail ont témoigné à mon égard d'une grande simplicité, très appréciable dans les moments tendus de la fin de thèse.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Pierre Del Moral, pour l'intérêt qu'il a porté à mon travail et pour l'honneur qu'il m'a fait en participant au jury de cette thèse. Je lui suis extrêmement reconnaissant des discussions scientifiques qui ont encouragé et guidé mes recherches.

Toute ma gratitude à Bruno Portier pour ses nombreux conseils qui ont grandement contribué au bon déroulement de ce travail. Je le remercie vivement de sa présence dans le jury.

Grâce à Jean-Pierre Vila j'ai eu la chance de travailler avec Jean-Philippe Steyer. Cette collaboration m'a permis de confronter mes travaux méthodologiques à la réalité et d'élargir le champ de mes connaissances. Merci à Jean-

Philippe Steyer d'avoir accepté spontanément d'être membre du jury. Il a toujours fait preuve d'un grande disponibilité en dépit de ses nombreuses sollicitations. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Je remercie aussi Gilles Ducharme pour sa participation à ce jury. Sa présence est pour moi très symbolique, puisque j'ai découvert la statistique au travers de ses cours. Il a, de surcroît, toujours tenu un rôle central dans la formation qui m'a mené jusqu'à cette thèse. Ses grandes qualités pédagogiques ont influé sur ma décision de m'orienter vers la recherche en statistique.

Une des particularités des thèses réalisées au sein de l'INRA est l'utilisation d'un comité de pilotage, un petit groupe de chercheurs qui se réunit une fois l'an pour évaluer le travail effectué et échanger des idées. Le soutien apporté par ce comité est inestimable. Je voudrais réserver une attention toute particulière à ses membres pour les précieux conseils qu'ils m'ont apportés. Parmi eux Nadine Hilgert et Marc Joannidès n'ont pu, hélas, faire partie du jury. Qu'ils soient assurés de ma profonde sympathie.

J'ai une pensée reconnaissante pour les membres de l'UMR Analyse des Systèmes et Biométrie de Montpellier. Ils m'ont chaleureusement accueilli et permis de travailler dans des conditions privilégiées durant ces trois années. Plusieurs prénoms me viennent à l'esprit : Alain, Brigitte, Cécile, Christophe, Isabelle, Laurent, Luc, Pascal, Philippe, Véronique, Vincent. Merci à tous. Je n'oublie pas les anciens thésards du laboratoire, Gérard, Nicolas, Pierre-André qui n'ont pas été avares de bons conseils.

Cette thèse n'aurait pu voir le jour sans un soutien financier. Il me fut accordé par un partenariat **INRA - Région Languedoc Roussillon**, je remercie sincèrement mes deux cofinanceurs.

Par ailleurs, sur un plan plus personnel, je tiens à dire à mes proches, membres de ma famille et amis, combien j'ai apprécié leur sollicitude et leurs encouragements qui me sont allés droit au coeur. Enfin, je remercie particulièrement Stéphanie, pour son infinie patience et son soutien affectif de tous les instants durant ces trois années.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Etat de l’art</b>	<b>15</b>
<b>1 Un point sur le filtrage non linéaire en temps discret</b>	<b>17</b>
1.1 Problématique . . . . .	17
1.2 Solution théorique . . . . .	18
1.3 Solutions actuellement proposées . . . . .	19
1.3.1 Filtre de Kalman . . . . .	19
1.3.2 Filtre de Kalman étendu . . . . .	19
1.3.3 Filtre de Kalman étendu dual . . . . .	20
1.3.4 Approches par les méthodes de Monte Carlo . . . . .	21
1.3.5 Approches par réseaux de neurones . . . . .	22
1.4 Objectifs et pistes explorées . . . . .	25
<b>2 Filtres usuels</b>	<b>27</b>
2.1 Filtre de Kalman . . . . .	28
2.2 Filtre de Kalman étendu . . . . .	29
2.3 Filtres de Monte Carlo classiques . . . . .	30
2.3.1 Procédure “Sequential Importance Sampling” (SIS) ou “ Importance Sampling” (IS) pour le filtrage . . . . .	31
2.3.2 Notations et objets utilisés en théorie du filtrage particulière	35
2.3.3 Distances utilisées pour évaluer les filtres . . . . .	38
2.3.4 Filtre de Monte Carlo pondéré . . . . .	39
2.3.5 Filtre de Monte Carlo à mémoire limitée . . . . .	42
2.3.6 Filtre de Monte Carlo à oubli exponentiel . . . . .	43
2.4 Filtres avec interaction . . . . .	45

2.4.1	Procédure SIS-R ou “Sampling Importance Resampling” pour le filtrage . . . . .	46
2.4.2	Arbres généalogiques et processus d’évolution . . . . .	48
2.4.3	Filtre Particulaire avec interaction . . . . .	49
2.5	Filtres particulaires régularisés . . . . .	52
2.5.1	Filtre particulaire pré-régularisé . . . . .	53
2.5.2	Filtre particulaire post-régularisé . . . . .	55
2.6	Conclusion du deuxième chapitre . . . . .	58

## **II Utilisation des noyaux de convolution en filtrage particulaire** **61**

### **3 Estimation de la densité du filtre optimal pour un système dynamique non linéaire** **63**

3.1	Notations relatives à l’estimation non paramétrique par noyaux de convolution . . . . .	64
3.2	Filtre par noyau à mémoire complète . . . . .	65
3.3	Filtre par noyau à mémoire limitée . . . . .	74
3.4	Filtre par noyau avec sélection . . . . .	78
3.5	Filtre par noyaux avec ré-échantillonnage . . . . .	92
3.6	Le fléau des grandes dimensions . . . . .	105
3.7	Conclusion du troisième chapitre . . . . .	106

### **4 Estimation de l’état d’un système dynamique** **109**

4.1	Espérance conditionnelle . . . . .	110
4.1.1	Régression par la méthode des noyaux . . . . .	110
4.1.2	Estimation de l’espérance par le filtre à mémoire complète . . . . .	111
4.1.3	Estimation de l’espérance par le filtre à mémoire tronquée . . . . .	119
4.1.4	Estimation de l’espérance par le filtre avec sélection . . . . .	122
4.1.5	Estimation de l’espérance par le filtre avec ré-échantillonnage . . . . .	126
4.2	Mode conditionnel . . . . .	128
4.2.1	Estimation du mode par les filtres à convolution simple . . . . .	130
4.2.2	Estimation du mode par le filtre à convolution avec ré-échantillonnage . . . . .	133
4.3	Conclusion du quatrième chapitre . . . . .	136

---

<b>5</b>	<b>Estimation conjointe états-paramètres d'un système dynamique</b>	<b>139</b>
5.1	Approche empirique . . . . .	140
5.2	Estimateurs des Moindres Carrés conditionnels . . . . .	141
5.2.1	Estimateur théorique . . . . .	141
5.2.2	L'estimateur en pratique . . . . .	143
5.3	Maximum de vraisemblance . . . . .	147
5.4	Problèmes d'optimisation relatifs à l'estimation de paramètres . . . . .	152
5.5	Estimation des paramètres par une approche bayésienne . . . . .	155
5.5.1	Algorithme de filtrage pour des systèmes dynamiques pa- ramétrés . . . . .	157
5.5.2	Etude des propriétés théoriques . . . . .	159
5.6	Conclusion du cinquième chapitre . . . . .	163
<b>6</b>	<b>Perspectives d'application au contrôle de systèmes dynamiques</b>	<b>165</b>
6.1	Introduction d'une commande prédéterminée . . . . .	165
6.2	Estimation d'un contrôle optimal prédictif . . . . .	167
<b>7</b>	<b>Positionnement par rapport aux filtres particuliers</b>	<b>169</b>
7.1	Formalisation de type filtre particulière de l'algorithme du filtre par convolution avec ré-échantillonnage . . . . .	169
7.2	Filtres particuliers construits à partir d'une approximation de la vraisemblance . . . . .	173
<b>III</b>	<b>Applications</b>	<b>179</b>
<b>8</b>	<b>Applications sur des simulations</b>	<b>181</b>
8.1	Problèmes de filtrage . . . . .	181
8.1.1	Système linéaire . . . . .	181
8.1.2	Systèmes non linéaires . . . . .	183
8.1.3	Choix de l'estimateur de l'état . . . . .	187
8.1.4	Filtre particulière avec la vraisemblance estimée . . . . .	188
8.2	Problèmes d'estimation de paramètres en cours de filtrage . . . . .	189
8.2.1	Minimisation stochastique d'une fonction de coût . . . . .	189
8.2.2	Estimateur des moindres carrés conditionnels . . . . .	192
8.2.3	Estimateur du maximum de vraisemblance . . . . .	197
8.2.4	Approche bayésienne . . . . .	203
8.3	Conclusion du huitième chapitre . . . . .	213

<b>9</b>	<b>Application à un bio-procédé de dépollution</b>	<b>215</b>
9.1	Présentation du problème . . . . .	216
9.2	Filtrage du bioprocédé . . . . .	220
9.2.1	Phase de simulations du bioprocédé . . . . .	220
9.2.2	Traitement des données réelles . . . . .	227
9.3	Conclusion du neuvième chapitre . . . . .	237
	 <b>Conclusion</b>	 <b>239</b>
<b>IV</b>	<b>Annexes</b>	<b>241</b>
<b>A</b>	<b>Eléments de théorie de l'estimation non paramétrique par noyaux de convolution</b>	<b>243</b>
A.1	Estimation de la densité . . . . .	243
A.1.1	Convergences stochastiques . . . . .	243
A.1.2	Notations et formalisations . . . . .	244
A.1.3	Quelques résultats de convergences . . . . .	245
A.2	Estimation de l'espérance . . . . .	252
A.2.1	Notations et formalisations . . . . .	253
A.2.2	Quelques résultats de convergence . . . . .	253
<b>B</b>	<b>Algorithmes</b>	<b>257</b>
B.1	Minimisation Stochastique de Fabian . . . . .	257
B.2	Algorithme du filtre avec sélection . . . . .	258
B.3	Algorithme du filtre avec ré-échantillonnage . . . . .	259
B.4	Algorithme de filtrage pour des systèmes dynamiques paramétrés .	260
<b>C</b>	<b>Présentation des procédés biotechnologiques</b>	<b>263</b>
C.1	Description d'un bioprocédé . . . . .	264
C.2	Modélisation par bilan de matière . . . . .	265

# Introduction

Les progrès scientifiques permettent de mieux comprendre notre environnement. Ainsi, certaines activités humaines basées sur des principes naturels jusqu'à présent mal compris sont, aujourd'hui, en partie décryptées et les acteurs sont identifiés. Il est donc possible de formaliser et d'optimiser ces activités avec des outils scientifiques. La part de l'empirisme bien que diminuée, joue cependant encore un rôle fondamental dans la formalisation.

Une part importante des nombreux phénomènes actuellement modélisés s'exprime sous forme de systèmes dynamiques. La modélisation par système dynamique est quasi transversale à tous les domaines scientifiques : elle s'applique, par exemple, aussi bien au guidage de missile qu'à la croissance de bactéries.

Plus simplement, supposons que l'on s'intéresse à l'évolution dans le temps de l'état d'un objet, caractérisé par une ou plusieurs variables. Souvent, la complexité des phénomènes considérés ne permet pas de mesurer directement les valeurs de l'état. Il faut alors se contenter de quantités auxiliaires appelées variables d'observations. Ce contexte définit le domaine d'application du filtrage. Le terme filtrage est intuitif, en effet, les données observées sont filtrées pour extraire de l'information sur l'état.

Le cas des bioréacteurs de dépollution, notre objet d'application privilégié, donne une illustration concrète d'un contexte de filtrage. Le bioréacteur fonctionne de la façon suivante : l'eau polluée alimente le réacteur, les bactéries contenues dans le réacteur consomment les polluants pour se développer, tout en dégageant différents gaz. Le réacteur restitue ainsi en sortie de l'eau "propre". Le filtrage consiste ici à estimer les concentrations de biomasses et polluants, grâce à des quantités mesurables, indirectement liées à ces concentrations, telles que les débits de gaz, le pH du réacteur, . . .

Souvent l'objectif n'est pas seulement de connaître l'état du système mais de contrôler son évolution. Si on revient à l'exemple du missile, atteindre la cible est plus important que de connaître précisément sa position à chaque instant. Pour

le bioreacteur, il est impératif que la concentration de polluants en sortie reste toujours inférieure à une norme européenne. Les estimations des concentrations des biomasses et polluants servent donc à réguler le bioréacteur pour que cette contrainte soit toujours respectée.

Les problèmes de filtrage sont donc souvent au centre de procédures de contrôle et d'automatisation de tâches. Cependant ce mémoire se limite à l'étude des filtres.

Le domaine du filtrage se divise en deux grandes catégories :

-Les systèmes linéaires, situation la plus simple : Kalman([84]) a construit un algorithme récursif de filtrage qui, lorsque le bruit sur le système est additif et gaussien, fournit la meilleure estimation de l'état, le filtre optimal. Si le bruit n'est pas gaussien, le filtre n'est plus optimal, mais il garde de bonnes propriétés. Il est actuellement, pour cette raison, le filtre le plus utilisé en pratique dans le cas linéaire.

-Les systèmes non linéaires constituent le cadre de recherche privilégié en filtrage car il n'existe pas de solution de dimension finie([19]). Ce travail de thèse se situe au coeur de ce contexte. Dans la pratique, les ingénieurs utilisent le filtre de Kalman étendu (FKE), méthode dérivée du cas linéaire. Bien que les résultats obtenus soient généralement satisfaisants, sa justification théorique (Picard[108]) repose sur des hypothèses vérifiées seulement par quelques systèmes particuliers. Mais si le filtre est mal initialisé ou le système fortement non linéaire, la qualité du filtrage en pâtit. De nombreuses variantes du FKE visant à corriger ces défaillances sont apparues, cependant aucune d'elles n'offre de garantie théorique de résultat.

Des méthodes basées sur un maillage de l'espace d'état (Kitagawa[87]) ont été développées ; les performances sont globalement satisfaisantes sur des systèmes de petite dimension. Le nombre de points nécessaire à un maillage de qualité constante croît rapidement avec la dimension de l'espace d'état. L'utilisation en ligne de ce type de procédures est donc à proscrire.

D'autres approches basées sur les méthodes de Monte Carlo, les filtres particuliers et leurs variantes sont récemment apparues. Elles visent à estimer la distribution du filtre optimal par des particules simulées dont l'évolution est liée aux observations. C'est une approche intéressante car elle s'appuie sur des résultats théoriques (Del Moral[42]) autres que la loi forte des grands nombres. De plus, les performances de ce type d'approche surpassent généralement celles du FKE. Mais elles connaissent aussi quelques défaillances hors de certaines hypothèses,

notamment lorsque le bruit sur le système est trop faible.

La piste explorée par cette thèse se classe parmi les méthodes de Monte Carlo puisque les approches proposées s'appuient sur la génération d'un grand nombre de variables aléatoires. Cependant, elles diffèrent des filtres particuliers en plusieurs points.

La loi de probabilité du filtre optimal est supposée admettre une densité que l'on cherche à estimer, alors que l'approche usuelle par filtres particuliers estime la mesure associée au filtre optimal. Certes les filtres particuliers régularisés ([104]) fournissent une estimation de la densité mais qui est basée sur une approximation par la mesure empirique de la loi du filtre optimal. Ce principe de régularisation est notamment recommandé pour des problèmes de filtrage mal posés (i.e. rapport signal sur bruit trop petit ou trop grand, cf. Del Moral & Miclo [34]).

La différence fondamentale avec les filtres particuliers réside dans le rôle joué par la densité associée au bruit sur le modèle d'observation. En effet, la mise en pratique des filtres particuliers requiert un bruit additif sur le modèle d'observation : ainsi peut-on évaluer la vraisemblance d'une particule et bâtir une mesure empirique. Ces méthodes particulières sont alors défaillantes si les observations sont faiblement bruitées et deviennent impraticables si les observations ne sont pas bruitées. Pour nos approches, des systèmes de particules complets, c'est-à-dire des états et des observations, sont générés pour construire les filtres. Le problème de filtrage peut alors se traiter comme un problème classique de régression. L'avantage principal est de s'autoriser ainsi à filtrer des systèmes dynamiques plus généraux : la faiblesse du bruit sur le système ne dégrade pas la qualité, bien au contraire, et il n'est pas nécessaire de connaître la forme analytique de la vraisemblance des observations. Les systèmes dynamiques, dotés de bruits non additifs, ne posent ainsi aucune difficulté, tant sur plan pratique que théorique.

Plus précisément, nos filtres sont basés sur une technique d'estimation fonctionnelle par noyaux de convolution. Depuis un certain nombre d'années, ces outils sont utilisés au Laboratoire d'Analyse des Systèmes et Biométrie, de l'INRA à Montpellier, pour l'étude de systèmes dynamiques incertains, pour leur identification Hilgert & al. ([76]) ou pour leur contrôle Hilgert([75]), Wagner ([127]).

Ce mémoire se divise en quatre grandes parties. Les trois premières constituent la thèse proprement dite et la quatrième regroupe les annexes.

La première, propose un état de l'art dans le domaine du filtrage. Les approches usuelles sont rapidement présentées dans le premier chapitre, notamment,

les filtres de Kalman et ses dérivés, les approches issues de réseaux de neurones et les méthodes de type Monte Carlo.

Le second chapitre est l'occasion de présenter, plus en détail, les filtres les plus courants dont le filtre de Kalman, le FKE, ainsi que les filtres particuliers. La partie se rapportant aux filtres particuliers est la plus détaillée puisque notre approche se classe parmi les méthodes de Monte Carlo. De plus, les résultats de convergence vers le filtre optimal des filtres particuliers les positionnent comme références, en théorie du filtrage non linéaire.

La seconde partie rassemble les développements méthodologiques originaux de ce mémoire, pour les problèmes de filtrage non linéaire. Nous présentons tout d'abord, au troisième chapitre, différentes techniques pour estimer la densité du filtre optimal ainsi que les résultats théoriques obtenus.

Comme souvent, en pratique, le filtrage consiste à fournir une estimation de la valeur de l'état, et non une densité, nous étudions cet aspect du filtrage au quatrième chapitre. En particulier, nous proposons des techniques d'estimation de l'espérance conditionnelle et du mode conditionnel de l'état. L'étude théorique de ces estimateurs est aussi réalisée.

De plus, il est assez courant que les systèmes dynamiques rencontrés en pratique ne soient pas parfaitement connus. Généralement, cette méconnaissance s'exprime sous forme de paramètres inconnus, qu'il est alors important de pouvoir estimer. Le cinquième chapitre porte sur ce délicat problème. Deux types d'approches sont étudiées : une par optimisation d'une fonction, de vraisemblance ou de somme de carrés conditionnels, l'autre par des techniques bayésiennes.

Précédemment, il a été mentionné que les problèmes de filtrage sont souvent au coeur d'une procédure de contrôle d'un système dynamique. Dans cette optique, le cas de l'introduction d'une variable de commande dans le système dynamique est envisagé au sixième chapitre. Nous proposons seulement une perspective d'adaptation de nos approches, à la commande de systèmes dynamiques. Aucune étude théorique n'est réalisée pour ce contexte.

Enfin, la parenté de nos approches avec les filtres particuliers étant assez forte, nous éclaircissons ce point lors du septième chapitre qui clôt la seconde partie.

La troisième partie de la thèse est consacrée aux applications. En premier lieu, dans le huitième chapitre, nos procédures de filtrage sont comparées à celles couramment rencontrées dans la littérature sur différents systèmes dynamiques artificiels. Il ressort que les performances de nos filtres, malgré leurs hypothèses

d'utilisation plus faibles, sont tout à fait comparables à celles des filtres particuliers usuels. Le cas des systèmes dynamiques, avec des paramètres inconnus à estimer, y est aussi considéré. L'approche bayésienne semble très prometteuse, au regard des exemples considérés.

Le neuvième chapitre est entièrement dédié à l'application centrale de cette thèse, l'étude d'un bio-réacteur de retraitement d'eaux usées. La principale difficulté est liée aux nombreuses incertitudes sur le système dynamique modélisant ce bioprocédé. De plus s'ajoute, pour le traitement des données expérimentales, le problème de la fiabilité des capteurs.

Une présentation détaillée du bio-réacteur de retraitement d'eaux usées est donnée en annexe.



# **Première partie**

## **Etat de l'art**



# Chapitre 1

## Un point sur le filtrage non linéaire en temps discret

### 1.1 Problématique

Le thème central de ce mémoire est le filtrage non linéaire en temps discret. Les premiers travaux relatifs à ce domaine sont dus aux ingénieurs. Il existe en effet, de nombreux problèmes pratiques qui relèvent de cette théorie. Notamment, toutes les situations pour lesquelles il est difficile, voire impossible, pour des raisons physiques ou financières, de mesurer l'état d'un système et où il faut alors se contenter de mesurer des quantités auxiliaires. Souvent le filtrage est utilisé à des fins de contrôle dans le but de faire évoluer l'état du système non observé dans le sens que l'on désire.

Parmi les nombreux exemples, citons un type de bioprocédés qui nous intéresse plus particulièrement, la dépollution biologique : les variables d'états du système sont les concentrations des polluants (substrats) et des bactéries (biomasses) contenus dans un bioréacteur. Il est impossible de les mesurer sans stopper le bioréacteur. Les variables observées sont par exemple des débits de gaz en sortie du bioréacteur. Le contrôle s'effectue ici sur le débit d'entrée du fluide pollué dans le réacteur, de manière à maintenir la qualité de l'effluent de sortie à un seuil donné et ceci quelles que soient les variations de la charge polluante en entrée. Cette opération est continue dans le temps, mais comme il est souvent d'usage en pratique, le système est discrétisé puisque les mesures ne s'effectuent qu'à intervalles de temps réguliers.

Plus généralement, tous les phénomènes physiques, chimiques ou biologiques

pouvant être modélisés par un système de la forme (1.1) relèvent de la théorie du filtrage en temps discret.

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad (1.1)$$

Description des variables :

- les  $x_t \in \mathbb{R}^d$  sont les variables d'état
- les  $y_t \in \mathbb{R}^q$  sont les variables observées
- les  $\varepsilon_t$  sont les bruits du modèle d'état
- les  $\eta_t$  sont les bruits du modèle d'observation

Les bruits sont indépendants des autres variables, ils servent à modéliser les aléas du système. Comme il a été expliqué précédemment, l'objet du travail est d'estimer les densités conditionnelles des variables d'états non observées,  $x_t$ , connaissant  $y_1, \dots, y_t$  les valeurs des variables observées jusqu'à l'instant  $t$ . Le problème ne se ramène pas simplement à une inversion des fonctions  $h_t$  car d'une part, elles ne sont pas toujours injectives et d'autre part, le bruit  $\eta_t$  engendre de l'incertitude. Le fait de considérer toutes les observations du passé permet de mieux prendre en compte l'effet du bruit sur le signal, ce qui idéalement permet d'aboutir à une estimation de  $x_t$  qui soit la plus vraisemblable étant donné les observations.

## 1.2 Solution théorique

La solution théorique du problème constitue le filtre optimal : la loi conditionnelle de l'état  $x_t$  sachant toutes les observations jusqu'à l'instant  $t$ ,  $y_1, \dots, y_t$ . Mais en pratique, il est souvent intéressant d'estimer la valeur de l'état  $x_t$  plutôt que toute la loi conditionnelle. L'estimation de l'état dépend alors du critère choisi. Par exemple, pour le critère classique de l'erreur quadratique moyenne l'estimation optimale est l'espérance de  $x_t$  connaissant  $(y_t, \dots, y_1)$  :

$$\mathbb{E}[x_t | y_1, \dots, y_t]$$

Dans de nombreux cas, il est suffisant d'estimer seulement l'état. Mais pour les cas plus complexes, où la loi de  $(x_t | y_1, \dots, y_t)$  est multimodale, il est préférable d'estimer la loi  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$  elle-même. Cependant, la plupart du temps, il faut se contenter d'estimer seulement la moyenne, la variance ou de localiser les modes.

Bien entendu, excepté pour quelques cas particuliers développés par la suite, il est

très difficile voire impossible, de déterminer le filtre optimal de manière exacte. De nombreuses méthodes d'approximation de ce filtre utilisant différents outils mathématiques ont émergé. Quelques unes sont évoquées dans les paragraphes suivants.

## 1.3 Solutions actuellement proposées

### 1.3.1 Filtre de Kalman

Dans le cas où les fonctions  $f$  et  $h$  sont linéaires et les bruits blancs gaussiens, le problème a été résolu par Kalman[84] en 1960. Il a construit un algorithme itératif, appelé filtre de Kalman, qui à chaque instant  $t$  fournit un  $\hat{x}_t$  minimisant l'erreur quadratique moyenne.

L'utilisation de cette méthode s'est donc généralisée, du fait de sa simplicité de mise en oeuvre, de sa très bonne performance et du faible coût en temps de calcul. De plus, en supprimant l'hypothèse de bruit gaussien, tout en restant dans le cadre du système dynamique linéaire, le filtre de Kalman fournit encore l'estimation linéaire de variance minimale de l'état du système, c'est-à-dire, une estimation sous-optimale de  $\mathbb{E}[x_t|y_1, \dots, y_t]$ . Cette robustesse du filtre de Kalman, par rapport à la nature du bruit, est la principale raison de la généralisation de son emploi en pratique.

Cependant, quelques inconvénients demeurent. Il est nécessaire de connaître les variances des bruits blancs et des informations sur  $x_0$  pour assurer une bonne initialisation du filtre, car celle-ci joue un rôle important dans la convergence du filtre quand l'état initial n'est qu'approché.

Lorsque ces quantités sont totalement ou partiellement inconnues, il est encore possible de les estimer en cours de filtrage. Dans ([21]) on trouvera quelques articles relatifs à ces problèmes. Mais il ne subsiste alors aucun résultat théorique. Il ressort de la pratique de ces méthodes que la convergence est souvent liée à la stabilité du système.

### 1.3.2 Filtre de Kalman étendu

Dans le cas général où les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  sont non linéaires, l'approche classique de Kalman ne peut plus s'appliquer telle quelle. Comme le filtre de Kalman

est optimal pour les systèmes linéaires, il est naturel de linéariser à chaque pas de temps le système (1.1) pour se ramener à un contexte où l'on peut l'utiliser. Cette démarche donne globalement de bons résultats. Elle est donc devenue la méthode la plus couramment utilisée dans la pratique. Dans la littérature, très riche sur ce sujet, elle est connue sous le nom de filtre de Kalman étendu, souvent notée FKE. Quelques résultats fondamentaux sont présentés dans [94] ou [72]. Pour des variantes du FKE, on peut se référer à [21].

Pour utiliser le filtre de Kalman étendu, il est donc nécessaire de rajouter l'hypothèse de dérivabilité sur les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  du système (1.1).

Le premier problème soulevé par cette démarche est le choix du point en lequel s'effectue, à chaque pas de temps, la linéarisation, ce que l'on nomme techniquement la trajectoire nominale. En général ce point correspond à l'estimation obtenue au pas de temps précédent.

En pratique, c'est l'unique procédé utilisé par les ingénieurs pour les problèmes non linéaires. Il est rapide et donne de bons résultats pour beaucoup de systèmes. Cependant, s'il y a de fortes non-linéarités ou s'il est mal initialisé, il est mis en défaut. De plus, l'utilisation du filtre de Kalman étendu n'est justifié théoriquement que pour certains cas particuliers ([108]).

### 1.3.3 Filtre de Kalman étendu dual

Il existe aussi des méthodes développées à partir du filtre de Kalman étendu pour le cas où les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  du modèle dynamique dépendent de paramètres inconnus. Les approches naïves consistant à rajouter les paramètres inconnus comme variables d'états du système entraînent généralement la divergence du filtre. Une autre approche consiste à coupler deux filtres de Kalman étendus, l'un estimant l'état du système et l'autre les paramètres. Cette méthode donne de bons résultats dans des domaines d'application très variés ; pour plus de détails on peut se référer aux travaux de Wan([72],[128]). Bien entendu, comme pour toutes les généralisations du filtre de Kalman, il n'y a pas de résultats théoriques assurant la convergence vers le filtre optimal. Cependant, sous les hypothèses de bruits gaussiens, la phase d'estimation des paramètres revient à maximiser une fonction de vraisemblance conditionnelle marginale de l'état du système. L'estimation peut être alors considérée comme de type maximum de vraisemblance, justifiant ainsi cette approche.

De nombreuses méthodes ont été développées pour concurrencer le filtre de Kalman étendu et ses variantes, sur lesquelles on ne s'étendra pas (cf. Chen[21]). A présent, donnons quelques précisions sur les alternatives à Kalman : les filtres particuliers et les filtres à réseaux de neurones, qui sont à la base de notre approche.

### 1.3.4 Approches par les méthodes de Monte Carlo

Un des objectifs courants du filtrage est la détermination des premiers moments ou des modes de la distribution conditionnelle  $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$ . La méthode de Monte Carlo pondérée fut l'une des premières méthodes de Monte Carlo utilisées à cet effet. Ces méthodes basées sur des simulations de grandes quantités de variables aléatoires, fournissent une estimation de la mesure associée au filtre optimal. Leur utilisation est justifiée par la loi forte des grands nombres.

Les premiers articles relatifs à ce sujet sont assez anciens, ils datent des années 70 (Akashi & al.[3], Handschin[71]). Cependant les ordinateurs de l'époque étant relativement peu puissants, la recherche sur ce thème n'a commencé à se développer qu'à partir des années 80 ([26],[87],[43]). Les performances actuelles des microprocesseurs ont favorisé le développement de nombreuses approches dont la plupart sont rassemblées dans Doucet & al.([56]).

Nous ne donnons ici qu'une description sommaire des différentes méthodes introduites. Pour plus de détails sur ces méthodes et leurs évolutions, on peut se référer à Oudjane([104]) ou Doucet([59]).

#### Filtres de Monte Carlo Pondérés

L'idée de la méthode est d'approcher par simulation la loi conditionnelle conjointe des états. Elle consiste à faire évoluer  $N$  trajectoires indépendantes suivant la loi du processus d'état et à les pondérer à chaque instant suivant leurs vraisemblances par rapport à l'observation courante. On en tire ainsi une distribution conditionnelle empirique de l'état. La loi forte des grands nombres, permet de caractériser l'erreur commise par rapport à la vraie loi conditionnelle, elle est d'ordre  $O(1/\sqrt{N})$ . Cependant en pratique, cet algorithme n'est pas satisfaisant car on observe une dégénérescence des pondérations dans le temps : toute la masse se regroupe sur une seule particule, entraînant ainsi la divergence du filtre. Des variantes à mémoire limitée ont permis de supprimer ce problème. Un résultat de convergence uniforme vers le filtre optimal a été démontré par Del Moral[39] sous des conditions d'ergodicité du modèle. Il existe aussi des variantes à oubli

exponentiel avec des résultats de convergence uniforme sous des conditions plus fortes. Cependant, hors du cadre de leurs hypothèses, ces variantes ne permettent pas d'améliorer les performances du filtre de Monte Carlo pondéré. Ces méthodes ont donc été abandonnées avec l'apparition d'un nouvel outil, les filtres particuliers avec interactions. Ces filtres améliorent l'exploration de l'espace par les particules et ralentissent la dégénérescence des poids en les réinitialisant régulièrement. Ces filtres sont présentés brièvement dans la section suivante.

### Filtres Particulaires avec interaction

Les filtres particuliers avec interactions, constituent la dernière génération des filtres de Monte Carlo. Ils ont été introduits simultanément par Gordon & al.([68]), Kitagawa([88]) et Del Moral & al.([34]) dans le milieu des années 90. La particularité de ces filtres, réside dans le fait que les particules simulées n'évo-  
luent pas indépendamment les unes des autres. En effet, les particules les plus vraisemblables au regard des observations se voient attribuer les poids les plus forts, elles sont donc multipliées en conséquence aux dépens des particules peu vraisemblables. De ce fait, le système de particules se concentre dans les régions intéressantes de l'espace d'état. L'exploration de l'espace est ainsi orientée par les observations. Des résultats de convergence vers le filtre optimal sont obtenus sous des hypothèses assez fortes. Les tentatives visant à affaiblir les hypothèses n'ont pas permis d'obtenir un filtre efficace en temps long. De plus, lorsque le bruit d'état est faible ou nul, les ré-échantillonnages successifs appauvrissent le système des particules ce qui entraîne encore une dégénérescence des particules. Certaines théories heuristiques de bruitage artificiel des particules ont été développées mais aucune méthode systématique n'a émergé.

### 1.3.5 Approches par réseaux de neurones

De nombreux auteurs ont cherché à utiliser cet outil à des fins de filtrage ou contrôle de systèmes non linéaires. De façon générale, il a été démontré ([25],[79]) que les réseaux de neurones à couches possèdent des propriétés d'approximateurs universels : toute fonction régulière à valeurs dans un compact, peut être approchée à un degré de précision fixé par un réseau de neurones de type perceptron multi-couches.

Cependant, l'usage des réseaux de neurones soulève trois problèmes majeurs : le choix de l'architecture, le nombre de neurones et l'optimisation des poids du réseau. Pour les deux premiers problèmes, des critères classiques de sélection de

modèles peuvent être utilisés ; pour plus de détails on pourra se référer à [125]. Quant au troisième, les algorithmes de minimisation de type gradient et les méthodes quasi-Newton sont conseillés, mais ils nécessitent de gros temps de calcul. Ceci a causé la disgrâce des réseaux de neurones avant la montée en puissance des microprocesseurs.

L'article d'Haykin [73] rassemble et compare les derniers résultats intéressants obtenus en filtrage avec différents types de réseaux de neurones : perceptrons multi-couches, réseaux récurrents et réseaux à bases radiales. Nous donnons ci-dessous, quelques précisions sur l'utilisation de ces différents types de réseaux pour le filtrage non linéaire.

### Réseaux de type perceptron

Les perceptrons sont les premiers réseaux de neurones apparus : ils sont constitués d'une ou plusieurs couches cachées contenant chacune un certain nombre de neurones. Les flux entrants dans les neurones de la première couche cachée sont des combinaisons linéaires des entrées du réseau. En appliquant à chaque neurone une fonction de transfert de type sigmoïdal sur les flux entrants, nous obtenons les flux sortants. L'opération se répète ainsi d'une couche cachée à l'autre.

L'idée d'utiliser un réseau comme filtre fut logiquement mise en avant, notamment par Parisini et Zoppoli [105]. Ils utilisent pour l'apprentissage du réseau une fonction de coût différente à chaque itération, basée sur la connaissance du modèle et des observations. Pour déterminer  $\hat{x}_t$  le filtre doit prendre en compte  $y_1, \dots, y_t$ . Le réseau doit donc avoir une entrée de plus à chaque itération. Ceci conduit à un réseau différent avec plus de paramètres à estimer, à chaque itération. Ce procédé n'est donc pas adapté au filtrage en ligne.

Parisini et Zoppoli ont contourné le problème (cf. [4]) en considérant un filtre à mémoire tronquée. Le réseau garde alors la même structure, d'une itération à l'autre. Ils ont proposé deux méthodes d'apprentissage du réseau, une en cours de filtrage et l'autre non. Les résultats expérimentaux obtenus sont souvent meilleurs que ceux obtenus par le filtre de Kalman étendu, mais il n'y a pas de résultats théoriques.

### Réseaux récurrents

Réduit à l'estimation d'état, le filtre optimal est l'espérance de l'état connaissant toutes les observations passées. Plutôt que de l'approximer en restreignant la

mémoire, il est possible d'utiliser une structure récurrente qui fera par conséquent intervenir toutes les observations du passé. C'est ce qui est fait par Lo[99]. Les réseaux qu'il utilise n'ont qu'une couche cachée mais le flux sortant des neurones au temps  $(t - 1)$  est ré-injecté dans le flux entrant des neurones au temps  $t$ . Lo a démontré qu'il est possible d'approcher, à une précision fixée, le filtre optimal par un réseau de neurones récurrent, en faisant tendre simultanément l'ensemble d'apprentissage et le nombre de neurones vers l'infini. Pour l'apprentissage des réseaux récurrents, il utilise les méthodes développées dans [130] et [107]. En pratique, cela soulève plusieurs problèmes : comme toujours le choix du nombre de neurones, mais aussi et surtout celui des données pour l'apprentissage, puisqu'en filtrage l'observation de l'état  $x_t$  du système est a priori difficile ou impossible. Cependant, sur les exemples évoqués dans [99], ces réseaux de neurones récurrents donnent de meilleurs résultats que le filtre de Kalman étendu, et ce, pour des réseaux à peu de neurones, mais avec un très gros ensemble d'apprentissage.

### Réseaux à bases radiales

Une autre famille de réseaux est aussi utilisée à des fins de filtrage, les réseaux à bases radiales. La particularité de ces réseaux est que chaque neurone de la couche cachée est caractérisé par un noyau, fonction à base radiale. Le flux entrant dans un neurone est formé des entrées du réseau. Le flux sortant est la valeur de l'application du noyau sur le flux entrant. La sortie du réseau est une combinaison linéaire de tous les flux sortants. Les paramètres à estimer sont donc les centres des noyaux ainsi que leurs dispersions et les coefficients de la combinaison linéaire. L'ouvrage de Yee [133] donne une idée du champ d'application de ces réseaux ainsi que de leurs bonnes propriétés théoriques. En effet, ils sont asymptotiquement équivalents aux estimateurs à noyau du type Nadaraya-Watson. La démonstration faite dans [133] est basée sur les travaux de Xu [132].

Pour utiliser ces réseaux de façon pratique en filtrage, il faut aussi tronquer la mémoire du filtre, de façon à bénéficier de la même structure de réseau à chaque itération, car le nombre d'entrées est alors constant. Dans ses travaux [133], Yee, compare les performances des réseaux à bases radiales avec celles du filtre de Kalman étendu et des réseaux récurrents de Lo. Les résultats qu'il obtient sont intéressants puisque sur les exemples traités le réseau à bases radiales se comporte mieux que le filtre de Kalman étendu et presque aussi bien que le réseau récurrent. De plus, la taille de l'échantillon d'apprentissage utilisé par Yee est ac-

ceptable ( $N = 800$ ) en comparaison de celle de Lo ( $N = 200000$ ), mais il n'a pas de résultats théoriques.

## 1.4 Objectifs et pistes explorées

L'objectif principal est la mise en place d'une méthode de filtrage, en temps réel, basée sur la connaissance du système dynamique et de données observées  $y_1, \dots, y_t$ .

Dans un premier temps, la construction d'un filtre à l'aide de réseaux de neurones a été envisagée. Les procédures mises en place par Lo([99]) et Yee([133]), n'utilisent pas les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  (qui caractérisent le modèle) ni les propriétés statistiques des bruits, mais nécessitent des échantillons  $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, t\}$  de données de taille assez grande, voire très grande pour Lo, ce qui n'est pas réaliste dans de nombreuses situations. L'approche de Parisini et Zoppoli ([105]) est différente. Ils supposent connaître uniquement les fonctions  $f_t$  et  $h_t$ , et cherchent un réseau de neurones de type perceptron minimisant une fonction de coût. Cependant ils n'ont aucune garantie qu'un tel réseau soit voisin du filtre optimal. Cette approche utilisant des hypothèses en adéquation avec notre objectif, une technique similaire a donc été envisagée. Les résultats obtenus avec les réseaux de neurones, qu'ils soient de type récurrent ou perceptron, furent toujours bien inférieurs à ceux obtenus par Lo([99]) ou Yee([133]). Par conséquent, les investigations dans cette direction n'ont pas été poursuivies.

Ce travail de prospection dans l'univers des réseaux de neurones, s'il n'a pas abouti à la construction d'un réseau capable d'estimer le filtre optimal, nous a permis, en revanche, d'approfondir nos connaissances sur les réseaux de neurones à bases radiales. La manipulation de ces derniers nous a amenés à concevoir le principe des filtres présentés dans cette thèse.

Les réseaux à bases radiales récupèrent les bonnes propriétés de l'estimateur à noyau de Nadaraya-Watson mais, comme pour tous les réseaux de neurones, ils nécessitent une phase d'apprentissage. Or, on souhaite obtenir un filtre uniquement à partir du système (1.1), sans base de données d'apprentissage. Un moyen naturel de régler le problème est de générer des données à partir du système (1.1) et de procéder ensuite à l'apprentissage. Mais il demeure alors une autre difficulté, l'apprentissage d'un réseau de neurones est généralement lourd en terme de

temps de calcul. Ainsi, pour notre approche du filtrage par réseau à base radiale, les données simulées ne servent pas pour effectuer l'apprentissage, mais sont utilisées comme paramètres du réseau : pour fixer les centres des fonctions de base de chaque neurone. L'avantage de cette méthode est de dispenser de toute optimisation de paramètres et du coup de s'autoriser à filtrer en ligne. Bien entendu, pour obtenir des résultats théoriques, il est nécessaire de simuler un grand nombre de données et de connaître la nature statistique exacte des bruits du système dynamique.

Cette démarche fournit une estimation consistante de  $\mathbb{E}[x_t|y_1, \dots, y_t]$  à l'aide d'une fonction de la forme d'un réseau à bases radiales. La généralisation de ce principe, nous a permis de construire plusieurs filtres pour estimer  $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$ . La mise en place de tels filtres relève de deux domaines statistiques : les filtres de Monte Carlo et l'estimation de densité par la méthode du noyau de convolution.

En pratique, des particules sont générées de manière semblable à celle des filtres de type Monte Carlo, sauf qu'une particule n'est pas seulement une succession, au cours du temps, d'états  $\tilde{x}_t$  mais une succession, au cours du temps, de couples états-observations  $(\tilde{x}_t, \tilde{y}_t)$ . De plus, aucune pondération n'est directement affectée à ces couples de particules qui constituent un maillage naturel de l'espace. Pour obtenir les estimations de  $\mathbb{E}[x_t|y_1, \dots, y_t]$  ou de  $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$  il suffit d'appliquer un noyau de convolution sur les variables observées  $y_1, \dots, y_t$  par rapport à ce maillage. Cette approche connaît bien sûr les mêmes problèmes que le filtre de Monte Carlo pondéré : lorsque le temps  $t$  augmente, la dimension de l'espace augmente aussi. Comme le nombre de particules ( ou le nombre de noeuds de la maille ) est constant il est tout à fait possible qu'aucune des particules simulées ne soit "proche" du véritable état, ce qui entraîne inévitablement la divergence du filtre. Heureusement, certaines variantes, comparables aux variantes des filtres de Monte Carlo, permettent d'éviter cette situation délicate. L'étude de ces différentes variantes, pour le filtre par noyau de convolution, ainsi que leurs propriétés théoriques, la convergence vers le filtre optimal et sa vitesse, constitue la part principale de l'apport méthodologique de cette thèse. Les autres aspects méthodologiques portent sur le problème de l'introduction, dans le système dynamique, de paramètres inconnus  $\theta$  à estimer.

Enfin, sur un plan pratique, l'objectif visé est l'application des techniques de filtrage, développées durant cette thèse, au modèle d'un bioréacteur de traitement d'eaux usées.

# Chapitre 2

## Filtres usuels

La première partie de ce chapitre est bien sûr consacrée au filtre de Kalman ([84]), puisque cette méthode est la référence pour les systèmes dynamiques linéaires. Ce filtre sera utile par la suite pour évaluer les performances de nos différentes approches.

Il est démontré qu'il est impossible d'avoir une solution de dimension finie ([19]) aux problèmes de filtrage non linéaire. Les méthodes développées pour résoudre ces problèmes sont donc approximatives. Leurs qualités théoriques sont alors liées à leur convergence asymptotique vers le filtre optimal.

Bien qu'il ne bénéficie pas de résultats théoriques, le filtre de Kalman étendu (FKE) est couramment employé par les ingénieurs pour le traitement de systèmes dynamiques non linéaires, ce qui en fait l'approche de référence pour ces systèmes. La seconde partie de ce chapitre lui est logiquement consacrée. L'objectif de toute nouvelle méthode de filtrage non linéaire est donc d'avoir en pratique un comportement supérieur à celui du FKE.

Le comportement imparfait du FKE a engendré un grand nombre de variantes plus ou moins robustes. Tout comme le FKE, ces variantes ne reposent sur aucun résultat théorique. La littérature disponible sur ce sujet est très vaste, [83], [72] ou [21] en fournissent un bon aperçu.

Les parties suivantes de ce chapitre sont consacrées aux filtres particuliers. Bien que ces filtres ne soient pas encore très répandus chez les ingénieurs, leur apport à la théorie du filtrage est incontestable. En effet, il n'existe pas d'autre méthode dotée de résultats de convergence, utilisables en ligne. Cependant, le comportement en pratique n'est pas toujours très bon. Les causes sont identifiées et comme pour le FKE un certain nombre de variantes ont émergé. Leur

comportement en pratique est sensiblement supérieur à celui des premiers filtres particuliers. Ceci est en particulier vérifié pour les filtres bootstrap([67]), les filtres particuliers avec interaction([39]) ou les filtres particuliers régularisés ([104],[95],[102],[129],[81]) qui font l'objet des dernières parties du chapitre.

## 2.1 Filtre de Kalman

Soit le système linéaire suivant, cas particulier du système (1.1) :

$$\begin{cases} x_t &= F_{t-1}x_{t-1} + c_{t-1} + G_{t-1}\varepsilon_{t-1} \\ y_t &= H_t x_t + d_t + \eta_t \end{cases}$$

où :

- $F_t, c_t, G_t, H_t, d_t$  sont des coefficients déterministes, à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^{d \times d}, \mathbb{R}^d, \mathbb{R}^{d \times k}, \mathbb{R}^{q \times d}, \mathbb{R}^q$
- Les bruits blancs  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  sont gaussiens, à valeurs respectivement dans  $\mathbb{R}^k$  et  $\mathbb{R}^q$ , avec  $Q_t$  et  $R_t$  comme matrices de covariances. De plus, ils sont mutuellement indépendants et indépendants de l'état initial du système  $x_0$ .
- $x_0$  est gaussien de moyenne  $\bar{x}_0$  et de covariances  $Q_0$ .

Le contexte du système linéaire avec des bruits additifs gaussiens permet de construire le filtre optimal à chaque instant. En effet, le caractère linéaire conserve la nature gaussienne du bruit, la distribution de  $x_t|y_1, \dots, y_t$  est donc gaussienne. Il est ainsi facile de calculer  $\hat{x}_t = \mathbb{E}[x_t|y_1, \dots, y_t]$ , l'estimateur généralement utilisé en pratique.  $\hat{x}_t$  et sa matrice de covariances  $P_t$  sont alors déterminées par les équations récurrentes suivantes :

Conditions initiales du filtre

$$\begin{cases} \hat{x}_0 &= \bar{x}_0 \\ P_0 &= Q_0 \end{cases}$$

Etape de prédiction

$$\begin{cases} \hat{x}_t^- &= F_{t-1}\hat{x}_{t-1} + c_{t-1} \\ P_t^- &= F_{t-1}P_{t-1}F_{t-1}' + G_{t-1}Q_{t-1}G_{t-1}' \end{cases}$$

Etape de correction

$$\begin{cases} \hat{x}_t &= \hat{x}_t^- + K_t[y_t - (H_t\hat{x}_t^- + d_t)] \\ P_t &= [I - K_t H_t]P_t^- \\ K_t &= P_t^- H_t' [H_t P_t^- H_t' + R_t]^{-1} \end{cases}$$

Le terme  $K_t$  est appelé gain de Kalman. Les suites des covariances  $\{P_t\}$  et des gains  $\{K_t\}$  étant indépendantes des observations il est donc possible de les pré-calculer, le temps de calcul durant le filtrage en sera diminué.

## 2.2 Filtre de Kalman étendu

A présent considérons un système dynamique non-linéaire, autre cas particulier de (1.1) :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t) + g_t(x_t)W_t \\ y_t &= h_t(x_t) + \eta_t \end{cases}$$

Les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  sont supposées dérivables. On se ramène au contexte précédent en linéarisant les équations du système. Pour cela, on se donne une suite  $\{\bar{x}_t\}$  appelée trajectoire nominale. Puis on effectue les approximations :

$$\begin{aligned} f_t(x) &\simeq f_t(\bar{x}_t) + \nabla f_t(\bar{x}_t)(x - \bar{x}_t) \\ g_t(x) &\simeq g_t(\bar{x}_t) \\ h_t(x) &\simeq h_t(\bar{x}_t) + \nabla h_t(\bar{x}_t)(x - \bar{x}_t) \end{aligned}$$

**Remarque :** Pour le choix de  $\bar{x}_t$ , il est préférable de prendre un estimateur de  $x_t$ , en général on utilise  $\hat{x}_t$ , l'estimation obtenue à l'instant  $t$ .

A partir des approximations précédentes et en posant

$$\begin{aligned} F_t &= \nabla f_t(\bar{x}_t) \\ c_t &= f_t(\bar{x}_t) - F_t\bar{x}_t \\ G_t &= g_t(\bar{x}_t) \\ H_t &= \nabla h_t(\bar{x}_t) \\ d_t &= h_t(\bar{x}_t) - H_t\bar{x}_t \end{aligned}$$

nous obtenons une approximation du système non linéaire précédent par le système linéaire suivant

$$\begin{cases} x_{t+1} &= F_t x_t + c_t + G_t W_t \\ y_t &= H_t x_t + d_t + \eta_t \end{cases}$$

Il est maintenant possible d'appliquer le filtre de Kalman standard à ce système linéaire.

C'est l'unique procédé utilisé en pratique par les ingénieurs pour les problèmes non linéaires. Il est rapide et donne de bons résultats pour beaucoup de systèmes

non linéaires. Cependant s'il y a de fortes non-linéarités ou s'il est mal initialisé, il est mis en défaut. L'utilisation du filtre de Kalman étendu n'est justifié théoriquement que pour certains cas particuliers (Picard [108]).

## 2.3 Filtres de Monte Carlo classiques

Le principe de base des filtres de Monte Carlo est présenté dans cette partie. Comme toute méthode de Monte Carlo, ces filtres s'appuient sur un grand nombre de simulations. Dans le cas du filtrage, les quantités simulées sont des particules émulant une trajectoire possible du système dynamique. C'est pourquoi les filtres de Monte Carlo sont souvent appelés filtres particulaires. Une étude détaillée des filtres particulaires simples et des filtres particulaires avec interaction est réalisée dans Oudjane([104]), Del Moral & Miclo([34]), Del Moral([28]) ou encore Doucet & al.([56]). Les résultats de convergence et de stabilité que nous évoquons, dans la suite, y sont notamment démontrés.

Les filtres particulaires ou filtres de Monte Carlo sont basés sur les procédures SIS : "Sequential Importance Sampling" (filtre particulaire simple) et SIS-R : "Sequential Importance Sampling-Resampling" (filtre particulaire avec interaction). Un état de l'art des méthodes de filtrage basées sur ces deux procédures est réalisé par Doucet([58]). Liu & Chen ([97]) effectuent le même travail de synthèse de l'emploi de ces deux procédures mais dans le cadre d'une étude générale des systèmes dynamiques.

Ces approches considèrent le problème du filtrage d'un point de vue plus probabiliste. Dans cette optique, le filtre optimal est la loi de probabilité de l'état  $x_t$  conditionnée par les observations, i.e.  $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$ . Le problème est alors d'estimer cette loi. A cette fin, des trajectoires d'état sont générées suivant le système dynamique, à partir desquelles une mesure empirique est construite en s'appuyant sur les observations  $y_1, \dots, y_t$ . Généralement, la loi forte des grands nombres assure la convergence de cette mesure empirique vers la mesure associée à  $x_t|y_1, \dots, y_t$ . Le filtre de Monte Carlo pondéré est la première approche de Monte Carlo utilisée pour le filtrage non linéaire. Dès les années 70, l'idée de faire évoluer  $N$  trajectoires indépendantes suivant le processus d'état et de les pondérer à chaque instant  $t$  par leurs vraisemblances calculées pour l'observation  $y_t$ , est exposée dans plusieurs articles. Les capacités de calcul des ordinateurs étant alors très limitées, ces approches ne furent pas développées.

A partir des années 80, l'évolution rapide de l'informatique a donné un regain

d'intérêt à ces méthodes. En effet la convergence étant asymptotique, il faut générer un grand nombre de trajectoires pour avoir une estimation de qualité. Cependant, les filtres de Monte Carlo pondérés ont montré quelques défaillances en temps long. Par exemple, il est assez courant que, parmi toutes les trajectoires simulées, une seule hérite de tout le poids attribué par la vraisemblance en l'observation. Cette dégénérescence des poids entraîne inévitablement la divergence du filtre.

Toutefois l'étude de ce filtre est très intéressante car elle introduit de manière naturelle le principe de base des filtres particuliers. Ces filtres de Monte Carlo pondérés classiques ont été améliorés pour obtenir les filtres particuliers avec interaction. Ces derniers diffèrent essentiellement, de leurs prédécesseurs, par la nature de l'évolution des trajectoires. Elles n'évoluent plus indépendamment les unes des autres, mais subissent une sélection : certaines se reproduisent et d'autres meurent. L'esprit de cette approche s'apparente aux algorithmes génétiques (Cf. Cerf[16], Del Moral & Miclo[35] ou Holland[77]) qui sont des procédures d'optimisation calquées sur l'évolution des gènes lors de la sélection naturelle des espèces.

Dans cette partie du chapitre, quelques uns des principaux filtres particuliers sont détaillés. La présentation débute par les plus anciens, qui sont d'ailleurs les plus simples, et se termine par les plus récents, les filtres avec interaction.

Au préalable, pour simplifier la description de ces filtres, certaines notations souvent employées par les auteurs de ce domaine seront introduites. La procédure "Sequential Importance Sampling" ou, en français, "tirage séquentiel suivant une fonction d'importance" étant le coeur de tous les filtres de Monte Carlo simples, est rappelée en premier lieu.

### 2.3.1 Procédure "Sequential Importance Sampling" (SIS) ou "Importance Sampling" (IS) pour le filtrage

La procédure "Importance Sampling" est couramment utilisée pour améliorer la qualité des estimations d'intégrales par les méthodes de Monte Carlo. La démarche est naturelle. Elle consiste simplement à donner plus d'importance aux points les plus cruciaux. Cette procédure souvent désignée par "Bayesian Importance Sampling" dans la littérature, possède de bonnes propriétés théoriques puisqu'elle est asymptotiquement sans biais et vérifie le théorème central limite. La procédure "Sequential Importance Sampling" est l'adaptation de l'"Importance Sampling" (IS) au problème du filtrage.

Avant d'exposer la procédure SIS, rappelons le principe du tirage suivant une fonction d'importance (IS). Ainsi, l'ordre chronologique d'introduction des différentes approches est respecté et l'introduction de SIS sera alors plus naturelle. Pour une présentation plus détaillée de ces méthodes originelles, on pourra se reporter par exemple à Doucet([58] ou [59]). Les développements suivants en sont largement inspirés.

Le tirage suivant une fonction d'importance est une des méthodes classiques de Monte Carlo pour les chaînes de Markov cachées. Rappelons tout d'abord le principe des procédures de Monte Carlo pour l'estimation d'espérance.

Le contexte d'application est tout à fait en adéquation avec notre cadre de travail :

- Le signal non observé est un processus markovien  $(x_t, t \in \mathbb{N})$  de distribution initiale  $\pi_0$  et de probabilité de transition  $p(x_t|x_{t-1})$  connue.
- Les observations  $(y_t, t \in \mathbb{N})$ , sont indépendantes conditionnellement aux  $x_t$  avec comme distribution  $p(y_t|x_t)$  connue.

Soit  $f$  une fonction intégrable par rapport à la loi  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ . Son espérance est notée

$$I(f) = E_{p(x_{0:t}|y_{0:t})}(f(x_{0:t})) = \int f(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t}$$

Pour estimer  $I(f)$  par l'approche classique de Monte Carlo, il suffit de générer  $N$  trajectoires  $\tilde{x}_{0:t}^i, i = 1, \dots, N$  suivant la loi  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ . Ces trajectoires permettent alors de calculer une mesure empirique de  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  :

$$\hat{p}^N(x_{0:t}|y_{0:t}) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{0:t}^i}$$

Il est alors possible d'estimer  $I(f)$  :

$$\bar{I}_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\tilde{x}_{0:t}^i)$$

et par la loi forte des grands nombres

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \bar{I}_N(f) = I(f) \text{ ps.}$$

Cette méthode d'estimation est tout à fait satisfaisante du point de vue théorique. Elle bénéficie d'un théorème de limite centrale. Cependant un problème se

pose en pratique. Dans la plupart des cas, il est impossible de générer des trajectoires suivant  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  à chaque instant  $t$ , car la loi a posteriori  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$  est connue à un coefficient de normalisation près.

Le tirage suivant une fonction d'importance (IS) est la solution alternative à ce problème. Puisqu'il n'est pas possible de générer directement des trajectoires suivant  $p(x_{0:t}|y_{0:t})$ , il suffit de les générer suivant une autre loi  $\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})$ , la fonction d'importance. La seule contrainte pour le choix de  $\pi_{imp}$  est :

$$p(x_{0:t}|y_{0:t}) > 0 \Rightarrow \pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t}) > 0.$$

Sous cette condition, l'espérance de  $f$  s'écrit :

$$\begin{aligned} I(f) &= E_{p(x_{0:t}|y_{0:t})}(f(x_{0:t})) \\ &= \int f(x_{0:t})p(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t} \\ &= \int f(x_{0:t})\frac{p(x_{0:t}|y_{0:t})}{\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})}\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t} \\ &= \int f(x_{0:t})\frac{p(y_{0:t}|x_{0:t})p(x_{0:t})}{p(y_{0:t})\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})}\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})dx_{0:t} \\ &= \frac{E_{\pi_{imp}}[f(\cdot)w(\cdot)]}{E_{\pi_{imp}}w(\cdot)} \end{aligned}$$

avec  $w(x_{0:t}) = p(y_{0:t}|x_{0:t})p(x_{0:t})/\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})$ .

Pour estimer  $I(f)$ , il suffit de générer  $N$  trajectoires  $\tilde{x}_{0:t}^i$ ,  $i = 1, \dots, N$  suivant la loi d'importance  $\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})$ , de les pondérer à l'aide de  $w$  puis de normaliser ces poids :

$$\begin{aligned} \hat{I}_N(f) &= \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N f(\tilde{x}_{0:t}^i)w^i}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N w^i} \\ &= \sum_{i=1}^N f(\tilde{x}_{0:t}^i)\hat{w}^i \end{aligned}$$

avec pour les poids d'importance :

$$\tilde{w}^i = \frac{p(y_{0:t}|\tilde{x}_{0:t}^i)p(\tilde{x}_{0:t}^i)}{\pi_{imp}(\tilde{x}_{0:t}^i|y_{0:t})} \quad \text{et} \quad \hat{w}^i = w^i / \sum_{j=1}^N w^j \quad \text{pour } i = 1, \dots, N.$$

L'estimation  $\widehat{I}_N(f)$  de  $I(f)$ , bien que biaisée, est, elle aussi, consistante par la loi forte des grands nombres (Geweke[64]). Dans la littérature statistique, cette procédure est généralement dénommée "Bayesian importance sampling".

La procédure SIS est simplement la généralisation séquentielle de la procédure IS présentée ci-dessus. La mise en oeuvre est simple, il faut tout d'abord choisir le nombre de particules  $N$  et la probabilité qui va jouer le rôle de la fonction d'importance :  $\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})$ . Puis, il suffit d'appliquer l'algorithme suivant, d'après Doucet[58] :

- Initialisation au temps  $t = 0$

Génération de  $N$  particules  $\tilde{x}_0^i \sim \pi_{imp}(x_0|y_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$

Pondération des particules  $w_0^i = \frac{p(y_0|\tilde{x}_0^i)p(\tilde{x}_0^i)}{\pi_{imp}(\tilde{x}_0^i|y_0)}$

Normalisation des poids  $\tilde{w}_0^i = \frac{w_0^i}{\sum_{j=1}^N w_0^{(j)}}$

- Pour les instants  $t \geq 1$

Evolution des  $N$  particules  $\tilde{x}_t^i \sim \pi_{imp}(\tilde{x}_t|\tilde{x}_{0:t-1}^i, y_{0:t})$   
où  $\tilde{x}_{0:t}^i = (\tilde{x}_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i)$

Pondération des particules  $w_t^i = w_{t-1}^i \frac{p(y_t|\tilde{x}_t^i)p(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t-1}^i)}{\pi_{imp}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{0:t-1}^i, y_{0:t})}$

Normalisation des poids  $\tilde{w}_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^N w_t^{(j)}}$

A chaque instant  $t$ , il est ainsi possible d'estimer la mesure de probabilité  $m_t$  des états sachant les observations,  $(x_{0:t}|y_{0:t})$  :

$$m_t^N = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^i \delta_{\tilde{x}_{0:t}^i}$$

Les filtres particuliers que nous présentons dans la suite, excepté les filtres avec interaction, sont des cas particuliers de cet algorithme général. Le grand avantage de cet algorithme est qu'il est parallélisable, donc un important gain de temps est potentiellement envisageable. Les performances de ce filtre ne sont toutefois pas très bonnes. En effet, la convergence en fonction du nombre de particules  $N$  est assez lente et dépend de l'instant  $t$ . Des précisions seront données lors des descriptions des filtres particuliers. De plus en pratique, il diverge souvent et le choix de la fonction d'importance est fondamental pour sa performance.

**Remarque :** Le problème du choix de la fonction d'importance a été étudié de manière à empêcher la divergence de l'algorithme : Doucet([58]) détaille le problème. La divergence de l'algorithme est la conséquence de l'annulation progressive des poids de toutes les particules excepté d'une seule qui récupère tout le poids de la mesure. Une première tentative pour empêcher cette divergence a consisté à contrôler la variance des poids. Mais Kong & al. ([92]) ont montré que la variance des poids ne peut que croître (stochastiquement) avec le temps. La divergence de cet algorithme est donc inévitable. Toutefois, pour retarder la divergence on peut choisir la fonction d'importance qui minimise la variance des poids. Il faut alors prendre (cf. [59])  $\pi_{imp}(x_t|\tilde{x}_{0:t-1}^i, y_{0:t}) = p(x_t|\tilde{x}_{t-1}^i, y_t)$ . Cette fonction d'importance n'est pas calculable analytiquement en général mais on peut toujours l'approximer par des méthodes de Monte Carlo. Elle est notamment utilisée dans ([43],[92]). L'étape de pondération de l'algorithme devient alors :  $w_t^i = w_{t-1}^i p(y_t|\tilde{x}_{t-1}^i)$ .

A présent, avant de décrire plus en détail les filtres particuliers usuels, introduisons les notations souvent employées par les auteurs de ce domaine.

### 2.3.2 Notations et objets utilisés en théorie du filtrage particulaire

Dans cette partie, sont seulement évoqués, les objets mathématiques à la base de cette approche. La présentation s'appuie sur le travail de Bartoli et Del Moral ([6]), auquel on peut se référer pour de plus amples détails.

Soit une suite de variables aléatoires,  $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$ , à valeurs dans un espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ .

**Définition 2.3.1 (Noyau markovien)** *Une transition markovienne ou un noyau*

de Markov sur  $E$  est une famille de probabilités

$$\{Q(x, \cdot) \text{ mesure de probabilité sur } E; x \in E\}$$

indexée par les points de  $E$ , telle que pour tout  $A \in \mathcal{E}$ , l'application  $x \mapsto Q(x, A)$  soit mesurable.

Transposons à la suite  $X$  : pour toute valeur  $X_{n-1} = x$ , la probabilité de transition  $Q_n(x, \cdot)$  caractérise les transitions possibles de l'état  $X_{n-1}$  vers un nouvel état  $X_n$  :

$$Q_n(x, dy) = P(X_n \in dy | X_{n-1} = x)$$

où  $dy$  voisinage infinitésimal de  $y \in E$ .

La définition suivante est importante, car l'hypothèse de mélangeance intervient dans de nombreux résultats de convergence des filtres particulières.

**Définition 2.3.2 (Noyau mélangeant)** *Le noyau positif  $Q$  défini sur  $E$  est dit mélangeant, s'il existe une constante  $0 < c \leq 1$  (constante de mélange) et une mesure positive non nulle  $\lambda$  telles que*

$$c\lambda(A) \leq Q(x, A) \leq \frac{1}{c}\lambda(A)$$

pour tout  $x \in E$ , et tout  $A \in \mathcal{E}$ .

**Définition 2.3.3 (Chaîne de Markov)** *Soit  $\Omega = E^{\mathbb{N}} = E \times E \times \dots$ , alors la suite  $X = \{X_n; n \in \mathbb{N}\}$  définie sur  $(\Omega, \mathcal{E}, P_\mu)$  telle que*

$$P_\mu(X_0 \in A_0, \dots, X_n \in A_n) = \int_{x_0 \in A_0} \dots \int_{x_n \in A_n} \mu(dx_0) Q_1(x_0, dx_1) \dots Q_n(x_{n-1}, dx_n)$$

est une chaîne de Markov à valeurs dans  $E$ , de loi initiale  $\mu$  et de transition  $\{Q_n; n > 0\}$ .

De plus, lorsque les transitions de probabilité ne dépendent pas de  $n$ , la chaîne de Markov  $X$  est homogène.

### Formalisation du système dynamique

Soient  $(E, \mathcal{E})$  et  $(F, \mathcal{F})$  deux espaces mesurables. On suppose que le couple signal-observation  $(X, Y) = \{(X_t, Y_t); t \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov sur  $E \times F$  de loi initiale  $\mu_0$  et de transition de probabilité  $\{M_t; t \in \mathbb{N}^*\}$ , toutes deux définies par

$$\begin{aligned} \mu_0(d(x_0, y_0)) &= g_0(x_0, y_0)\nu_0(dx_0)\gamma_0(dy_0) \\ M_t((x_{t-1}, y_{t-1}), d(x_t, y_t)) &= g_t(x_t, y_t)Q_t(x_{t-1}, dx_t)\gamma_t(dy_t) \end{aligned}$$

avec

- $\gamma_t$ , respectivement  $\nu_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$  une suite de mesures de probabilité sur  $F$ , respectivement  $E$ .

- $g_t$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , une suite de fonctions mesurables positives sur  $E \times F$

- $Q_t$ ,  $t \in \mathbb{N}^*$ , est un noyau markovien sur  $E$ .

Plus précisément, le processus d'état du système dynamique,  $X = \{X_t; t \in \mathbb{N}\}$  est une chaîne de Markov inhomogène avec  $\{Q_t; t \in \mathbb{N}^*\}$  comme noyau de transition. c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} P(X_t \in dx | X_{t-1} = x_{t-1}, \dots, X_0 = x_0) &= P(X_t \in dx | X_{t-1} = x_{t-1}) \\ &= Q_t(x_{t-1}, dx). \end{aligned}$$

Si l'on note  $X_{0:t} = (X_0, \dots, X_t)$  et  $\nu_{0:t}$  sa distribution de probabilité alors on a

$$P(X_{0:t} \in dx_{0:t}) = \nu_{0:t}(dx_{0:t}) = \nu_0(dx_0)Q_1(x_0, dx_1) \cdots Q_t(x_{t-1}, dx_t)$$

La distribution des observations  $Y_t$  conditionnellement à l'état  $X_t$  s'écrit alors

$$P(Y_t \in dy | X_t = x) = g_t(x, y)\gamma_t(dy)$$

Dans la suite pour simplifier les expressions on considère la fonction de vraisemblance marginale définie pour tout  $x \in E$  :

$$\Psi_t(x) = g_t(x, Y_t).$$

Les observations  $\{Y_t; t \in \mathbb{N}^*\}$  étant indépendantes conditionnellement aux variables d'état  $\{X_t; t \in \mathbb{N}^*\}$ , la distribution de  $Y_{1:t} = (Y_1, \dots, Y_t)$  conditionnée par  $X_{1:t}$ , s'écrit comme le produit des vraisemblances marginales :

$$P(Y_{1:t} \in dy_{1:t} | X_{1:t}) = \prod_{i=1}^t \Psi_i(x_i)\gamma_i(dy_i)$$

Le filtre optimal, i.e. la loi conditionnelle de l'état  $X_t$  sachant les observations du passé  $Y_{1:t}$ , est noté

$$\pi_t(dx) = P(X_t \in dx | Y_{1:t}) \quad t \in \mathbb{N}^*$$

avec  $\pi_0 (= \nu_0)$  la distribution de l'état initial  $X_0$ .

### 2.3.3 Distances utilisées pour évaluer les filtres

Diverses métriques sont considérées car le problème du contrôle de l'erreur des filtres varie de l'une à l'autre. Oudjane([104]) en donne un développement complet.

Les filtres particuliers fournissant une approximation de la mesure associée au filtre optimal, il est nécessaire de considérer les distances sur les ensembles de mesures. Bien que certaines des distances évoquées soient définies sur des domaines plus vastes, l'étude est restreinte à  $\mathcal{M}(E)$ , l'ensemble des mesures positives sur l'ensemble  $E$ .

#### Définition 2.3.4 (Distance moyenne faible)

$$D_f(\mu, \mu') = \sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \mu - \mu', \phi \rangle |$$

pour toutes mesures  $\mu, \mu' \in \mathcal{M}(E)$ , éventuellement aléatoires. Où la fonction  $\phi$  est mesurable sur  $E$ , normée à 1 et le produit scalaire  $\langle \mu, \phi \rangle = \int \phi d\mu$ .

#### Définition 2.3.5 (Variation totale)

$$\|\mu - \mu'\| = 2 \sup_A |\mu(A) - \mu'(A)| \quad \text{pour toutes mesures } \mu, \mu' \in \mathcal{M}(E)$$

où  $A$  est un borélien de  $E$ .

**Définition 2.3.6 (Taux de contraction sous la variation totale)** Soit  $Q$  un noyau markovien défini sur  $E$ . Le taux de contraction de  $Q$  pour la variation totale est

$$\beta(Q) = \sup_{\mu, \mu' \in \mathcal{M}} \frac{\|Q\mu - Q\mu'\|}{\|\mu - \mu'\|}$$

Cette quantité  $\beta(Q)$  s'appelle aussi coefficient de Dobrushin est vérifiée  $\beta(Q) \in [0, 1]$  (cf. Bartoli & Del Moral [6]).

**Proposition 2.3.1 (contraction de l'erreur)** *Pour toutes mesures de probabilité  $\mu, \mu' \in \mathcal{M}(E)$  et pour toute fonction  $\Psi$  positive et bornée sur  $E$  alors*

$$\|Q\mu - Q\mu'\| \leq \beta(Q)\|\mu - \mu'\|$$

$$\|\Psi \cdot \mu - \Psi \cdot \mu'\| \leq \min\{\gamma, \gamma'\}\|\mu - \mu'\|$$

$$\text{avec } \gamma = \frac{\|\Psi\|}{\langle \mu, \Psi \rangle} \quad \text{et} \quad \gamma' = \frac{\|\Psi\|}{\langle \mu', \Psi \rangle}$$

Où  $\Psi \cdot \mu$  désigne le produit projectif entre la fonction  $\Psi$  et la mesure  $\mu$  défini par

$$(\Psi \cdot \mu)(dx) = \frac{\Psi(x)\mu(dx)}{\langle \mu, \Psi \rangle} = \frac{\Psi(x)\mu(dx)}{\int \Psi(x)\mu(dx)}$$

**Démonstration :** Une démonstration de la première inégalité est proposée dans Oudjane([104]) p40. Une démonstration de la seconde inégalité est obtenue par Hürzeler([80]) p99-100.

**Remarque :** Sous les hypothèses de mélangeance de la définition 2.3.2, on a  $\beta(Q) \leq 1 - c$  (cf. Del Moral & al.[30] ou Del Moral[28]).

### 2.3.4 Filtre de Monte Carlo pondéré

Le filtre de Monte Carlo pondéré est un cas particulier de l'algorithme SIS avec pour fonction d'importance  $\pi_{imp} = Q_t$ . Ce choix est naturel, puisque les particules sont ainsi générées suivant la dynamique du système. De plus, la phase de pondération de l'algorithme est simplifiée. Mais cette fonction d'importance a un défaut : les particules sont générées sans prendre en compte les observations  $y_{1:t}$ .

La loi de l'état initial, supposée connue, est notée  $\pi_0 : X_0 \sim \pi_0$ . L'objectif est encore d'estimer la mesure  $\pi_t$ , le filtre optimal  $\pi_t(dx) = P(X_t \in dx | y_1, \dots, y_t)$ .

L'étape initiale consiste à générer  $N$  particules,  $(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^N)$  *i.i.d.*  $\sim \pi_0$ . Avec ces  $N$  particules, on peut calculer une estimation de  $\pi_0$  :

$$\pi_0^N = \sum_{i=1}^N \omega_0^i \delta_{\tilde{x}_0^i} \quad \text{avec} \quad \omega_0^i = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N$$

A présent, il est possible d'entamer la procédure récursive du filtre de Monte Carlo pondéré. On la décrit pour un instant  $t > 0$  quelconque :

(i) Evolution de chacune des particules suivant le noyau markovien : pour chaque  $i$  on génère  $\tilde{x}_t^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot)$ . On considère à présent la nouvelle particule  $\tilde{x}_{0:t}^i = (\tilde{x}_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i)$ , qui est la concaténation de tous les états successifs de la  $i^{\text{ème}}$  trajectoire.

(ii) Correction des poids associés aux particules suivant leurs vraisemblances respectives :

$$\omega_t^i = \frac{\Psi_t(\tilde{x}_t^i) \omega_{t-1}^i}{\sum_{i=1}^N \Psi_t(\tilde{x}_t^i) \omega_{t-1}^i}$$

On obtient ainsi les approximations

$$\pi_{0:t}^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{0:t}^i} \quad \text{et} \quad \pi_t^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

Le schéma suivant synthétise bien les deux étapes de la procédure récursive :

$$\pi_t^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{\text{évolution}} \pi_{t+1|t}^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i} \xrightarrow[\Psi_t(\cdot)]{\text{correction}} \pi_{t+1}^N = \sum_{i=1}^N \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1}^i}$$

L'évolution du filtre d'un temps à l'autre est donc régie par l'opérateur linéaire  $R_t = \Psi_t Q_t$  défini sur  $\mathcal{M}(E)$ . Ainsi  $\pi_t = R_t(\pi_{t-1})$  et en généralisant l'expression,  $\pi_t = R_{t:1} \pi_0$ .

Avant de préciser les propriétés du filtre de Monte Carlo pondéré, il reste une dernière notion à introduire : le coefficient de transport de l'erreur. Ce coefficient est souvent utilisé pour caractériser les majorants de l'erreur des filtres de Monte Carlo.

### Le coefficient de transport de l'erreur

$$\bar{\gamma}_t = \frac{\sup_{x \in E} \Psi_t(x)}{\langle Q_t \pi_{t-1}, \Psi_t \rangle}$$

où le produit scalaire  $\langle Q_t \pi_{t-1}, \Psi_t \rangle = \int_E \Psi_t(x) (Q_t \pi_{t-1})(dx)$ . Par extension, le produit  $\bar{\gamma}_t \cdots \bar{\gamma}_1$  est noté  $\bar{\gamma}_{t:1}$ .

Ce coefficient caractérise l'apport de l'observation sur la mesure prédictive. Globalement,  $\bar{\gamma}_t$  est grand lorsque l'observation  $y_t$  modifie sensiblement la prédiction  $\pi_{t|t-1}$ .

### Propriétés du filtre de Monte Carlo pondéré

Une majoration de l'erreur selon la distance moyenne faible de l'estimation de  $\pi_{0:t}$ , la loi de toute la trajectoire  $(X_0, \dots, X_t | y_1, \dots, y_t)$ , est obtenue en appliquant la loi des grands nombres :

#### Théorème 2.3.1

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E} [ | \langle \pi_{0:t} - \pi_{0:t}^N, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq 2 \frac{\bar{\gamma}_{t:1}}{\sqrt{N}}$$

**Démonstration :** Voir ([104] p79)

Il existe d'autres résultats, de convergence, intéressants dans la littérature, par exemple : Del Moral([41]) pour la première preuve en norme  $L^2$ , Del Moral([38]) ou Del Moral & Miclo([34]) pour les normes  $L^p, \dots$

L'avantage de cette approche est que la qualité de l'approximation n'est pas liée à la dimension de l'espace d'état ni à la nature des non linéarités du système. Il suffit d'être capable de générer et de faire évoluer des particules. Le temps requis pour cette tâche peut être plus ou moins important suivant la dimension ou la complexité du système. Mais il reste toujours très raisonnable pour les ordinateurs actuels.

Cependant, en pratique, cet algorithme fonctionne très mal : plus ou moins rapidement, toute la masse se regroupe sur une seule particule, provoquant ainsi la dégénérescence des pondérations. La conséquence directe est donc la divergence du filtre. De plus, toutes les particules possédant des poids quasi nuls continuent à évoluer et donc à gaspiller du temps de calcul.

Ce problème s'explique bien d'un point de vue théorique ; la borne du théorème 2.3.1 peut croître très vite dans le temps pour un nombre  $N$  de particules fixé. L'approximation n'est donc pas uniforme en temps.

Pour contourner cette difficulté, plusieurs variantes du filtre de Monte Carlo pondéré ont été introduites. La première consiste à limiter la mémoire du filtre. Ainsi les particules ayant un poids quasi nul en début de filtrage ne sont plus condamnées à garder un poids insignifiant à tous les instants successifs. Une autre va-

riante, moins brutale, consiste à oublier progressivement le passé : plus une observation est ancienne, moins elle a d'influence sur les poids des particules. Ces deux approches sont rapidement exposées dans les parties suivantes.

### 2.3.5 Filtre de Monte Carlo à mémoire limitée

L'idée est simple, on utilise uniquement les  $T$  observations les plus récentes pour estimer le filtre optimal. On s'intéresse alors à la loi de  $x_t | y_t, \dots, y_{t-T}$ . C'est une idée assez ancienne, elle est apparue avec les extensions du filtre de Kalman ([83]) pour stabiliser le filtre lorsque le système est mal connu.

Le filtre limité aux  $T$  dernières observations se note

$$\pi_{t,T}(dx) = \begin{cases} P[X_t \in dx | Y_{1:t}] & \text{si } t \leq T \\ P[X_t \in dx | Y_{t-T:t}] & \text{sinon} \end{cases}$$

Le filtre de Monte Carlo à mémoire limitée à  $T$  observations se note  $\pi_{t,T}^N$ , il est construit à l'aide de l'algorithme suivant :

L'initialisation est identique à celle du filtre de Monte Carlo à mémoire complète :

Génération de  $N$  particules :

$$(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^N) \text{ i.i.d. } \sim \pi_0$$

Calcul du filtre :

$$\pi_{0,T}^N = \sum_{i=1}^N \omega_0^i \delta_{\tilde{x}_0^i} \quad \text{avec } \omega_0^i = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N$$

(i) Evolution  $\tilde{x}_t^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot)$ .

(ii) Correction :

$$\omega_t^i = \frac{\Psi_t(\tilde{x}_t^i) \omega_{t-1}^i}{\sum_{i=1}^N \Psi_t(\tilde{x}_t^i) \omega_{t-1}^i} \quad \text{si } t \leq T, \quad \omega_t^i = \frac{\frac{\Psi_t(\tilde{x}_t^i)}{\Psi_{t-T}(\tilde{x}_{t-T}^i)} \omega_{t-1}^i}{\sum_{i=1}^N \frac{\Psi_t(\tilde{x}_t^i)}{\Psi_{t-T}(\tilde{x}_{t-T}^i)} \omega_{t-1}^i} \quad \text{sinon}$$

ainsi on obtient

$$\pi_{t,T}^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

### Propriétés du filtre de Monte Carlo à mémoire limitée

P. Del Moral a montré, sous des conditions d'ergodicité, un résultat de convergence uniforme en temps du filtre de Monte Carlo à mémoire limitée vers le filtre optimal. Le théorème suivant précise ce résultat.

**Théorème 2.3.2** *On suppose le système homogène avec un bruit additif sur les observations : à chaque instant  $t$ , le noyau de transition  $Q_t = Q$ , la fonction d'observation  $h_t = h$  et les bruits  $V_t$  sur les observations sont identiquement distribués. Supposons de plus que les deux conditions suivantes soient vérifiées :*

- (i) *Le noyau de transition  $Q$  possède une unique mesure invariante  $\mu$  telle que pour toute fonction  $\phi$  mesurable bornée sur  $E$  (espace des états), et toute mesure de probabilité  $\nu$  sur  $\mathcal{P}(E)$ ,*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} | \langle Q^t \nu - \mu, \phi \rangle | = 0 \text{ et } \lim_{t \rightarrow \infty} \sup \langle \mu, \Phi_t \rangle = 0$$

$$\text{où } \Phi_t(x) = | \langle Q^t \delta_x - \mu, \phi \rangle | \text{ pour tout } x \in E.$$

- (ii) *La fonction d'observation  $h$  est telle que*  

$$\sup_{t \geq 0} \mathbb{E}[h(X_t) - \mathbb{E}[h(X_t)]]^2 < \infty, \quad \text{i.e. } \text{Var}(h(X_t)) < \infty$$

*Alors il existe une fonction croissante  $T : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que*

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \mathbb{E} | \langle \pi_{t, T(N)}^N - \pi_t, \phi \rangle | = 0$$

**Démonstration :** La démonstration est l'objet de l'article (Del Moral [39]).

La limitation de la mémoire assure une plus grande stabilité au filtre, mais en dehors du cadre des hypothèses fortes du théorème, les performances demeurent insuffisantes.

### 2.3.6 Filtre de Monte Carlo à oubli exponentiel

Comme pour le filtre à mémoire limitée, l'idée de réduire progressivement l'influence des anciennes observations date des extensions du filtre de Kalman ([83]). Cette fois la mémoire du filtre n'est pas tronquée brutalement mais la part des anciennes observations dans la vraisemblance est écrasée progressivement. L'implémentation est tout à fait similaire à celle du filtre de Monte Carlo pondéré,

excepté l'introduction du coefficient d'oubli  $\alpha \in [0; 1]$  dans l'étape de correction :

(i) Evolution :  $\tilde{x}_t^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot).$

(ii) Correction :

$$\omega_t^i = \frac{\Psi_t(\tilde{x}_t^i)(\omega_{t-1}^i)^\alpha}{\sum_{i=1}^N \Psi_t(\tilde{x}_t^i)(\omega_{t-1}^i)^\alpha} \quad \forall i$$

ainsi on obtient

$$\pi_t^{\alpha, N} = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

De cette manière, plus le facteur d'oubli  $\alpha$  est proche de un, moins la mémoire est écrasée. Réciproquement, plus  $\alpha$  est proche de zéro, plus la mémoire est écrasée.

### Propriétés du filtre de Monte Carlo à oubli exponentiel

Tout d'abord nous donnons un résultat général pour,  $\pi_t^\alpha$ , le filtre à oubli exponentiel sans approximation particulière. Il assure, sous de fortes conditions, la convergence uniforme vers le filtre optimal lorsque  $\alpha \rightarrow 1$ , c'est-à-dire lorsque la mémoire augmente.

**Théorème 2.3.3** *Si pour tout entier  $t \geq 1$  il existe*

- *Deux constantes  $0 < m_t < M_t$  telles que pour tout  $\tilde{x} \in E$  :  
 $m_t \leq \Psi_t(\tilde{x}) \leq M_t$ . Soit  $\tilde{\gamma}_t = M_t/m_t$*
- *Une constante de mélange  $\varepsilon_t \geq \varepsilon > 0$  et une mesure positive  $\lambda_t$  telles que pour tout  $\tilde{x} \in E$  :  $\varepsilon_t \lambda_t \leq Q_t(\tilde{x}, \cdot) \leq \frac{1}{\varepsilon_t} \lambda_t$ . (i.e. le noyau de transition du système dynamique est mélangeant)*
- *Une constante  $C > 0$  telle que  $\mathbb{E}[\log \tilde{\gamma}_t] \leq C$*

Alors pour tout facteur d'oubli  $0 \leq \alpha \leq 1$ , on a

$$\mathbb{E} \|\pi_t^\alpha - \pi_t\| \leq \frac{2C(1-\alpha)}{\log(3)\varepsilon^4}$$

**Démonstration :** La démonstration du théorème, basée sur des techniques hilbertiennes, repose fortement sur les hypothèses de mélange et de vraisemblance bornée strictement positive (voir [104] p87-88).

Pour l’approximation particulière, le corollaire suivant en découle. Afin de caractériser la convergence en fonction du nombre de particules,  $\alpha$  est défini comme une fonction de  $N$  telle que  $\lim_{N \rightarrow \infty} \alpha(N) = 1$ .

**Corollaire 2.3.3.1** *Sous les mêmes hypothèses que celles du théorème précédent on a*

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E} | \langle \pi_t^{\alpha(N),N} - \pi_t, \phi \rangle | \leq \frac{1}{\sqrt{\log N}} \left[ \frac{4C}{\log(3)\varepsilon^4} + 8C \right] + \frac{2}{N^{1/4}}$$

avec  $\alpha(N) = 1 - \frac{1}{\sqrt{\log N}}$

**Démonstration :** Une démonstration est donnée dans [104] p88-90.

Comme pour le filtre à mémoire limitée le comportement n’est pas satisfaisant lorsque le système dynamique ne vérifie pas les hypothèses du théorème.

D’une manière générale, les filtres de Monte Carlo pondérés, à mémoire limitée ou oubli progressif sont victimes du défaut de la fonction d’importance  $\pi_{imp} = Q_t$  : les particules sont générées à partir du système dynamique sans tenir compte des observations. Il est donc peu probable qu’elles explorent la zone intéressante de l’espace. Les filtres particuliers avec interaction ont donc été introduits afin de régler ce problème.

## 2.4 Filtres avec interaction

La principale innovation des filtres avec interaction est que l’étape d’évolution des particules va se faire en tenant compte des observations.

Dès 1993, Gordon & al. ([68]) proposent de prendre en compte les observations lors de la phase d’évolution des particules, suivant la procédure SIR : “sampling importance resampling”. Le filtre ainsi obtenu, nommé “bootstrap filter”, surpasse largement le FKE. Le “bootstrap filter” rencontrant les mêmes défaillances que les filtres de Monte Carlo, Gordon propose une version robustifiée empiriquement ([67]). Dans le même temps, Kitagawa([88]) proposa un “Monte Carlo filter” basé aussi sur la procédure SIR. Les résultats obtenus sur divers exemples furent très

encourageants et confirmèrent notamment la supériorité de cette approche sur le FKE.

Cependant, pour tous les filtres évoqués ci-dessus, les particules ne sont plus générées de manière indépendante. Il n'est plus possible d'utiliser directement la loi forte des grands nombres pour obtenir des propriétés théoriques.

Mais parallèlement à ces travaux, Del Moral ([44],[43],[42]) proposa le filtre particulaire avec interaction, également basé sur le SIR, plus riche en résultats théoriques : pour l'étude de sa convergence on peut se référer à Del Moral([41]), LeGland & Oudjane([95]), pour la démonstration du théorème central limite à Del Moral & Guionnet ([36]) ou Del Moral & al. ([32]) et enfin pour l'étude des grandes déviations à Del Moral & Guionnet ([37]). Del Moral a, de plus, réalisé des extensions de ces travaux au cas où l'observation est en temps continu. Mais ceux-ci sortent du cadre de cette thèse.

Pour une étude complète des méthodes particulières, dans un contexte plus large que le filtrage, on peut consulter Del Moral([28]) ou Del Moral & Miclo([34]).

Avant de présenter le filtre particulaire avec interaction, il apparaît intéressant de développer la procédure SIS-R qui, de par son caractère général, englobe la plupart des filtres par interaction de la littérature.

### 2.4.1 Procédure SIS-R ou “Sampling Importance Resampling” pour le filtrage

La mise en oeuvre est semblable au filtre SIS, mis à part l'ajout d'une étape de “bootstrap” avant l'évolution vers l'instant suivant. Il faut à nouveau choisir le nombre de particules  $N$  et la loi de probabilité qui va jouer le rôle de la fonction d'importance :  $\pi_{imp}(x_{0:t}|y_{0:t})$ . On applique ensuite l'algorithme suivant :

- Initialisation au temps  $t = 0$

Génération de  $N$  particules  $\tilde{x}_0^i \sim \pi_{imp}(x_0|y_0)$ ,  $i = 1, \dots, N$

Pondération des particules  $w_0^i = \frac{p(y_0|\tilde{x}_0^i)p(\tilde{x}_0^i)}{\pi_{imp}(\tilde{x}_0^i|y_0)}$

Normalisation des poids  $\tilde{w}_0^i = \frac{w_0^i}{\sum_{j=1}^N w_0^j}$

- Pour les instants  $t \geq 1$

- Etape SIS :

Evolution des  $N$  particules  $\tilde{x}_t^i \sim \pi_{imp}(x_t|\tilde{x}_{0:t-1}^i, y_{0:t})$  et  
 $\tilde{x}_{0:t}^i = (\tilde{x}_{0:t-1}^i, \tilde{x}_t^i)$

Pondération des particules  $w_t^i = w_{t-1}^i \frac{p(y_t|\tilde{x}_t^i)p(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{t-1}^i)}{\pi_{imp}(\tilde{x}_t^i|\tilde{x}_{0:t-1}^i, y_{0:t})}$

Normalisation des poids  $\tilde{w}_t^i = \frac{w_t^i}{\sum_{j=1}^N w_t^j}$

Estimation de la mesure de probabilité  $m_t$  de  $(x_{0:t}|y_{0:t})$   
 $m_t^N = \sum_{i=1}^N \tilde{w}_t^i \delta_{\tilde{x}_{0:t}^i}$

- Etape Ré-échantillonnage :

Génération de  $N$  trajectoires  $\tilde{x}_{0:t}^i \sim m_t^N$

Cet algorithme réduit les problèmes de dégénérescence rencontrés par l'algorithme SIS, mais en contrepartie, il soulève plusieurs problèmes. Du point de vue pratique, les calculs ne sont plus parallélisables et, du point de vue théorique, les particules générées ne sont plus indépendantes après l'étape de ré-échantillonnage. Cependant Berzuini & al. ([13]) ont établi un théorème centrale limite pour la procédure SIS-R lorsque l'étape de ré-échantillonnage est effectuée à chaque instant.

**Remarques :** Il existe de nombreuses variantes (Pitt & Shephard [109], Crisan & al.[24]). Parfois, certaines n'effectuent pas systématiquement l'étape de ré-échantillonnage car celle-ci cause une perte de diversité temporaire au sein des particules.

Plusieurs travaux concernent le nombre  $N$  de particules à utiliser, par exemple Doucet([58]), Liu et Chen([97]). En effet, l'étape de ré-échantillonnage permet de changer le nombre de particules d'une étape à l'autre. Un critère indicateur du niveau de dégénérescence, introduit par Kong & al.([92]) et Liu ([96]), permet de le déterminer.

Le caractère sélectif de certaines étapes de l'algorithme SIS-R, rappelle le principe des algorithmes de minimisation tels que les algorithmes génétiques ou de recuit simulé. L'étude d'objets mathématiques plus généraux, comme les processus d'évolution, permet de caractériser ce lien. Quelques précisions, sur ce sujet, sont données dans la partie suivante.

## 2.4.2 Arbres généalogiques et processus d'évolution

Tout au long de ce mémoire, nous concentrons notre étude sur l'estimation de l'état du système à l'instant courant. Cependant, comme nous l'évoquerons par la suite, il est possible de s'intéresser à tous les états de l'instant initial jusqu'à l'instant présent, et ainsi considérer des trajectoires. Dans ce cadre, les particules deviennent des processus dont l'évolution est régie par un principe de mutation/sélection. Le problème peut alors être formalisé par un arbre généalogique représentant l'évolution ancestrale des particules. Cette formalisation est exposée en détail par Del Moral([28, 29]). Son principal intérêt est de donner un cadre théorique unifié à de nombreuses techniques d'estimation, souvent empiriques, issues de domaines variés : physique biologie, mathématique, . . . La grande variété des champs d'application provient du fait qu'une large gamme de problèmes peut s'interpréter en terme de modèle d'évolution.

Sur le plan statistique, le mécanisme au coeur du processus d'évolution : mutation/sélection, s'assimile à une technique de simulation de type acceptation/rejet, voir Del Moral & Doucet[31] pour une étude récente de cet aspect.

Pour plus de détails, sur tous les domaines d'application, la bibliographie et les résultats asymptotiques de cette généralisation des approches particulières aux processus d'évolution, on peut consulter Del Moral([28]).

Après cet aperçu du caractère général des approches particulières, nous retournons vers le problème particulier du filtrage non linéaire. Nous poursuivons la présentation des filtres usuels, par le filtre particulière avec interaction qui fut l'un des premiers filtres avec ré-échantillonnage à avoir été proposé.

### 2.4.3 Filtre Particulaire avec interaction

Le filtre particulière avec interaction introduit par Del Moral([44]) est aussi un cas particulier de l'algorithme SIS-R avec, comme fonction d'importance,  $\pi_{imp} = Q_t$ . C'est la même fonction d'importance que les filtres de Monte Carlo classiques, mais sa spécificité est de faire interagir les particules entre elles lors de l'étape d'évolution.

Cette famille de filtres est actuellement une des plus performantes en matière d'estimation de la mesure associée au filtre optimal. Comme nous l'avons expliqué précédemment pour le cas général du filtre SIS-R, l'évolution des particules au temps suivant est soumise à un critère de sélection : les particules les plus vraisemblables au regard des observations ont une forte probabilité d'évoluer et, bien sûr, les moins vraisemblables risquent de disparaître. Afin d'éviter que le nombre de particules diminue, une particule peut ici avoir plusieurs descendants. C'est en général le cas pour les plus vraisemblables. Ainsi au cours du temps, les particules se positionnent naturellement dans la partie intéressante de l'espace.

Le phénomène de sélection décrit ci-dessus se ramène en pratique à une phase d'échantillonnage avant la phase d'évolution :

L'initialisation est identique à celle du filtre de Monte Carlo à mémoire complète :

Génération de  $N$  particules

$$(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^N) \text{ i.i.d. } \sim \pi_0$$

Calcul du filtre

$$\pi_0^N = \sum_{i=1}^N \omega_0^i \delta_{\tilde{x}_0^i} \quad \text{avec } \omega_0^i = \frac{1}{N}, \quad i = 1, \dots, N$$

- (i) Echantillonnage : on gènère  $(\tilde{x}_{t-1}^1, \dots, \tilde{x}_{t-1}^N) \sim \pi_{t-1}^N$ .
- (ii) Evolution des particules :  $\tilde{x}_{t|t-1}^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot)$
- (iii) Pondération des particules :

$$\omega_t^i = \frac{\Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{i=1}^N \Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}$$

on obtient ainsi l'approximation du filtre optimal

$$\pi_t^N = \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i}$$

Comme pour les filtres précédents, la représentation sous forme de schéma synthétise bien le principe de la procédure récursive :

$$\begin{aligned} \pi_t^N &= \sum_{i=1}^N \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i} \xrightarrow[\pi_t^N]{bootstrap} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_t^i} \xrightarrow[Q_t(\cdot, \cdot)]{évolution} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \\ &\xrightarrow[\Psi_{t+1}(\cdot)]{pondération} \pi_{t+1}^N = \sum_{i=1}^N \omega_{t+1}^i \delta_{\tilde{x}_{t+1|t}^i} \end{aligned}$$

Le premier résultat de convergence de cet algorithme a été obtenu par Del Moral ([41]). Nous donnons dans le théorème suivant les premières majorations obtenues dans la littérature

**Théorème 2.4.1** *Si pour tout  $t \geq 1$ ,  $\sup_{x \in E} \Psi_t(x) = M_t < \infty$  alors*

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^N, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^t 2^{t+1-k} \beta_{t:k+1} \bar{\gamma}_{t:k}$$

*et si de plus, pour tout entier  $t \geq 1$ ,  $0 < m_t = \inf_{x \in E} \langle Q_t(x, \cdot), \Psi_t \rangle$  alors les deux inégalités suivantes sont satisfaites :*

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^N, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq \frac{2}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^t \beta_{t:k+1} \gamma_{t:k}$$

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^N, \phi \rangle |^p | Y_{1:t} ]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{C_p}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^t \gamma_{t:k}$$

où  $\gamma_k = M_k/m_k$ ,  $\gamma_{t:k} = \prod_{l=k}^t \gamma_l$ ,  $\beta_{t:k} = \prod_{l=k}^t \beta_l$ ,  $\beta_k = \beta(Q_k)$  est le taux de contraction du noyau  $Q_k$  sous la variation totale (voir Def 2.3.6) et  $C_p = 2 \left[ \frac{1}{\sqrt{\pi}} 8^{\frac{p}{2}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \right]^{1/p}$ . En rajoutant l'hypothèse : pour tout entier  $k \geq 1$ , il existe une constante de domination  $c_k$  et une mesure de probabilité  $\nu_k \in \mathcal{P}(E)$  telle que  $Q_k(x, \cdot) \leq c_k \nu_k$ , on a l'inégalité suivante :

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[\langle \pi_t - \pi_t^N, \phi \rangle | Y_{1:t}] \leq \frac{2\gamma_t}{\sqrt{N}} + \frac{4}{\sqrt{N}} \sum_{k=2}^t \beta_{t:k+1} \bar{\gamma}_{t:k} \gamma_{k-1} c_k$$

Des résultats avec des bornes plus fines et de convergence uniforme dans le temps sont présentés dans Del Moral([28]), Del Moral & Miclo([34]). Ils ne sont pas retranscrits ici, car cela nécessiterait l'introduction d'un certain nombre de notions, qui ne sont pas nécessaires aux développements méthodologiques de cette thèse. Cependant, afin de donner une intuition de l'amélioration de la vitesse sous l'hypothèse de mélangeance, on peut remarquer que tous les coefficients  $\beta_l$  vérifieraient alors une condition du type  $\beta_l < 1 - \epsilon$  avec  $\epsilon \in ]0, 1[$ . Ainsi, la tendance "explosive" des coefficients  $\gamma_{t:k}$  serait compensée par les  $\beta_{t:k}$ .

Ce filtre se comporte mieux que les variantes du filtre de Monte Carlo pondéré, mais il connaît les mêmes difficultés. Dans les situations, où le bruit sur les observations est faible ou absent et où le bruit sur le modèle d'état est faible, il diverge aussi. Cette divergence du filtre est encore due à la dégénérescence des particules. Le ré-échantillonnage systématique à chaque instant semble parfois favoriser la dégénérescence. Pour améliorer le comportement du filtre, certains auteurs (voir par exemple Kong & al. [92]) ont proposé des méthodes avec échantillonnage périodique. Cependant, malgré leurs résultats théoriques, aucune de ces méthodes ne semble s'imposer, le comportement du filtre demeurant imparfait.

Selon certains auteurs dont Oudjane([104]), le caractère discret du filtre est un facteur déterminant dans ce phénomène de divergence. D'autres approches estimant la densité du filtre optimal, et non sa mesure, ont donc été proposées : une étape de régularisation est ajoutée dans l'algorithme. Cette régularisation consiste à construire une estimation de la densité à partir de l'approximation discrète de la mesure. Le caractère diffus de la densité assure une plus grande diversité de particules et ainsi réduit les risques de divergence. La régularisation peut se faire de plusieurs manières différentes ; deux sont détaillées dans la partie suivante.

## 2.5 Filtres particuliers régularisés

L'intérêt pratique de la régularisation évoqué ci-dessus peut se caractériser du point de vue théorique. Lorsque le modèle dynamique est mal posé, c'est à dire lorsque le rapport signal sur bruit est soit très grand, soit très petit, les filtres particuliers sont en difficulté (cf. Del Moral & Miclo[34]). Pour contourner ce problème, il est possible de travailler sur le même modèle en modifiant simplement l'amplitude des bruits. Bien que l'on commette une erreur en ne travaillant pas sur le bon système, si le système est suffisamment stable (cf. Del Moral & Miclo[34]), on obtient encore des estimations convergentes. Une telle modification, de l'amplitude des bruits, revient à régulariser les mesures empiriques produites par les filtres particuliers usuels.

La régularisation des mesures empiriques peut être effectuée à l'aide de noyaux de convolution. Ce type d'approche à des fins de filtrage est utilisé par Warnes([129]), Hürzeler & Künsch ([81]), Musso & al.([102]), LeGland & Oudjane ([95]) ou encore Oudjane([104]). L'apport d'Oudjane en la matière étant conséquent, une large part de cette section est inspirée de ses travaux.

La première partie du troisième chapitre étant consacrée à l'estimation fonctionnelle par noyaux de convolution, on pourra s'y reporter par avance pour obtenir des précisions sur les objets considérés dans la section suivante. Détaillons seulement les notations introduites.

Soient  $K$  le noyau de convolution,  $K : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} : x = (x_1, \dots, x_d) \mapsto K(x)$ ,  $h$  le facteur de dispersion ou la "fenêtre" du noyau,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ , et  $D_i f = \partial f / \partial x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^d$  :

$$\begin{aligned} K_h(x) &= 1/hK(x/h) \\ |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_d! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \\ D^\alpha f &= D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} f \end{aligned}$$

$W^{2,1}$  est l'espace de Sobolev des fonctions mesurables sur  $\mathbb{R}^d$  dont les dérivées jusqu'à l'ordre 2 sont dans  $L^1$ , et enfin  $\pi_t^{N,h}$  est le filtre particulière régularisé avec le noyau  $K_h$ .

Le filtre particulière avec interaction est au coeur de cette approche. Pour ga-

rantir une plus grande diversité des particules, Oudjane([104]) propose de remplacer l'étape "bootstrap" par une étape de simulation à partir d'une densité. Cette densité est la régularisation par convolution de l'approximation de la mesure du filtre optimal. Il est possible de régulariser l'approximation de la mesure du filtre optimal à deux étapes de l'algorithme : avant ou après l'étape de correction. Nous décrivons dans ce qui suit la mise en place de ces deux approches.

### 2.5.1 Filtre particulière pré-régularisé

Le filtre particulière pré-régularisé repose sur une régularisation de la mesure empirique avant la correction des pondérations des particules. Le passage de  $\pi_{t-1}^{N,h}$  à  $\pi_t^{N,h}$  se résume en quatre étapes synthétisées par le schéma suivant :

$$\pi_{t-1}^{N,h} \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{t-1}^i} \xrightarrow[Q_t]{\text{Prédiction}} \pi_{t|t-1}^{N,h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i}$$

$$\pi_{t|t-1}^{N,h} \xrightarrow[K_h]{\text{Régularisation}} \nu_{t|t-1}^{N,h} = K_h * \pi_{t|t-1}^{N,h} \xrightarrow[\Psi_t]{\text{Correction}} \pi_t^{N,h} = \Psi_t \cdot \nu_{t|t-1}^{N,h}$$

L'avantage de cette approche est que la fonction de vraisemblance s'applique à tout le support de  $\nu_{t|t-1}^{N,h}$ . En contrepartie la phase d'échantillonnage est très lourde à mettre en oeuvre. Il faut avoir recours à des procédures du type acceptation-rejet, ce qui augmente considérablement le temps de calcul.

Les résultats suivants donnent un aperçu des propriétés théoriques du filtre pré-régularisé. Ils sont tirés de Oudjane([104]) ou LeGland & Oudjane([95]). Les deux théorèmes suivants assurent la convergence faible :

**Théorème 2.5.1** *Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :*

- *La vraisemblance moyenne définie comme  $\langle Q_k(x, \cdot), \Psi_k \rangle$  est bornée inférieurement, et la vraisemblance est bornée supérieurement : il existe  $m_k > 0$  et  $M_k < \infty$  tels que  $m_k = \inf_{x \in E} \langle Q_k(x, \cdot), \Psi_k \rangle$  et  $M_k = \sup_{x \in E} \Psi_k(x)$ . Soit  $\gamma_k = M_k/m_k$  et  $\gamma_{n:m} = \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_m$*

- *Pour tout  $x \in E$ ,  $Q_k(x, \cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $q_k(x, \cdot) \in W^{2,1}$ , vérifiant  $|q_k(x, \cdot)|_{2,1} \leq D_k$  avec  $D_k$  constante positive et  $|q_k(x, \cdot)|_{2,1} = (\int \sum_{|\alpha|=2} |D^\alpha q_k(x, u)|^2 du)^{1/2}$ .*

Alors

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^{N,h}, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + \frac{1}{\sqrt{N}}] \sum_{k=1}^t \beta_{k+1:t} \gamma_{k:t}$$

avec  $D_{max} = \max_{k=1, \dots, t} \{D_k\}$  et  $a_2 = 2 \max_{|\alpha|=2} \int_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha| K(x) dx$

Le théorème suivant donne un résultat plus fort sous une hypothèse de domination du noyau de transition  $Q_k$ ,

**Théorème 2.5.2** Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :

- La vraisemblance moyenne est bornée inférieurement, et la vraisemblance est bornée supérieurement : il existe  $m_k > 0$  et  $M_k < \infty$  tels que  $m_k = \inf_{x \in E} \langle Q_k(x, \cdot), \Psi_k \rangle$  et  $M_k = \sup_{x \in E} \Psi_k(x)$ . Soit  $\gamma_k = M_k/m_k$  et  $\gamma_{n:m} = \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_m$

- Le noyau de transition  $Q_k(x, \cdot)$  est dominé : il existe une constante  $c_k$  et une mesure de probabilité  $\nu_k$  telles que  $Q_k(x, \cdot) \leq c_k \nu_k$ .

- Le filtre optimal prédictif  $\pi_{k|k-1}$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $f_{k|k-1} \in W^{2,1}$ , vérifiant  $|f_{k|k-1}|_{2,1} \leq D_k$  avec  $D_k$  variable aléatoire positive mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $Y_{1:k-1}$ .

Alors

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^{N,h}, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + \frac{2}{\sqrt{N}}] \sum_{k=2}^{t+1} \beta_{k+1:t} \bar{\gamma}_{k:t} \gamma_{k-1} c_k$$

Le théorème suivant montre un résultat de convergence en variation totale pour le filtre pré-régularisé. Les hypothèses font intervenir la notion de classe d'un noyau, la définition précise de cette notion est donnée dans la première partie du chapitre 3. A titre indicatif, les noyaux de convolution courants, tels que le noyau gaussien ou d'Epanechnikof sont de classe 2.

**Théorème 2.5.3** Soit  $K$  un noyau de régularisation de classe 2. Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :

- Le filtre optimal prédictif  $\pi_{k|k-1}$  est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $f_{k|k-1} \in W^{2,1}$ , vérifiant  $|f_{k|k-1}|_{2,1} \leq D_k$  avec  $D_k$  variable aléatoire positive mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $Y_{1:k-1}$ .

- Pour tout  $x \in E$ ,  $I_k = \sup_{x \in E} \int_{\mathbb{R}^d} |u^{d+1}| Q_k(x, u) du < \infty$

Alors

- Si  $K \in L^2$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} |x^{d+1}| K^2(x) dx < \infty$  :

$$\mathbb{E}[\|\pi_t - \pi_t^{N,h}\| | Y_{1:t}] \leq [h^2 a_2 D_{max} + 2^{d/2} A_d \frac{(1 + I_{max}) \|K\|_2^{1/2}}{\sqrt{N} h^d}] \sum_{k=1}^t \beta_{k:t} \bar{\gamma}_{k:t}$$

- Si  $K \in L^p$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} |x^{d+1}| K(x) dx < \infty$  :

$$(\mathbb{E}[\|\pi_t - \pi_t^{N,h}\|^p | Y_{1:t}])^{1/p} \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + C_{p,d} \frac{(1 + I_{max}) \|K\|_p^{1/2}}{\sqrt{N^{1/4} h^{d(p-1)/(2p)}}}] \sum_{k=1}^t \beta_{k:t} \bar{\gamma}_{k:t}$$

avec  $I_{max} = \max_{1 \leq k \leq t} I_k$ ,  $A_d$  constante uniquement dépendante de  $N$  et  $C_{p,d} = 2^{(d+3)/2} \left( \frac{8^{p/2} \Gamma(\frac{p+1}{2})}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/(2p)} A_d$

Le terme en  $1/\sqrt{N^{1/4} h^{d(p-1)/(2p)}}$  dans la borne supérieure ci-dessus, résulte de l'utilisation des résultats de Holmström & Klemelä [78].

## 2.5.2 Filtre particulière post-régularisé

Le filtre particulière post-régularisé repose sur une régularisation de la mesure empirique après la correction des pondérations des particules. Le passage de  $\pi_{t-1}^{N,h}$  à  $\pi_t^{N,h}$  se résume en quatre étapes synthétisées par le schéma suivant :

$$\pi_{t-1}^{N,h} \xrightarrow{\text{Echantillonnage}} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{t-1}^i} \xrightarrow[Q_t]{\text{Prédiction}} \pi_{t|t-1}^{N,h} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i}$$

$$\pi_{t|t-1}^{N,h} \xrightarrow[\Psi_t]{\text{Correction}} \tilde{\pi}_t^{N,h} = \Psi_t \cdot \pi_{t|t-1}^{N,h} \xrightarrow[K_h]{\text{Régularisation}} \pi_t^{N,h} = K_h * \tilde{\pi}_t^{N,h}$$

L'inconvénient de cette approche est que la fonction de vraisemblance ne s'applique uniquement qu'aux  $N$  particules. En contrepartie la phase d'échantillonnage est plus rapide. En effet, l'estimation s'obtient à partir d'un mélange

de noyaux. Elle est donc facilement simulable, lors de l'échantillonnage au pas suivant.

Comme pour le filtre pré-régularisé, les résultats théoriques suivants sur le filtre post-régularisé sont tirés de Oudjane([104]) ou LeGland & Oudjane([95]). Des résultats analogues, au cas précédent, ont été obtenus. Les deux théorèmes suivants sont donc relatifs à la convergence faible :

**Théorème 2.5.4** *Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :*

- *La vraisemblance moyenne est bornée inférieurement, et la vraisemblance est bornée supérieurement : il existe  $m_k > 0$  et  $M_k < \infty$  tels que  $m_k = \inf_{x \in E} < Q_k(x, \cdot), \Psi_k >$  et  $M_k = \sup_{x \in E} \Psi_k(x)$ . Soit  $\gamma_k = M_k/m_k$  et  $\gamma_{n:m} = \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_m$*

- *Pour tout  $x \in E$ ,  $Q(x, \cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $q_k(x, \cdot) \in W^{2,1}$ , vérifiant  $\|q_k(x, \cdot)\|_{2,1} \leq D_k$  avec  $D_k$  constante positive.*

-  *$M'_k = \max\{\|\Psi_k\|, 2 \sum_{i=1}^k \|D_i \Psi_k\|, \sum_{i,j=1}^k \|D_i D_j \Psi_k\|\} < \infty$ , soit  $\gamma' = M'_k/m_k$  et  $\bar{\gamma}' = M'_k/\bar{m}_k$ .*

*Alors*

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| < \pi_t - \pi_t^{N,h}, \phi > | | Y_{1:t} ] \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + \frac{2}{\sqrt{N}}] \sum_{k=1}^t \beta_{k+1:t} \gamma'_{k:n}$$

avec  $D_{max} = \max_{k=1, \dots, t} \{D_k\}$  et  $a_2 = 2 \max_{|\alpha|=2} \int_{\mathbb{R}^d} |x^\alpha| K(x) dx$

**Théorème 2.5.5** *Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :*

- *La vraisemblance moyenne est bornée inférieurement, et la vraisemblance est bornée supérieurement il existe  $m_k > 0$  et  $M_k < \infty$  tels que  $m_k = \inf_{x \in E} < Q_k(x, \cdot), \Psi_k >$  et  $M_k = \sup_{x \in E} \Psi_k(x)$ . Soit  $\gamma_k = M_k/m_k$  et  $\gamma_{n:m} = \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_m$*

- *Le noyau de transition  $Q_k(x, \cdot)$  est dominé : il existe une constante  $c_k$  et une mesure de probabilité  $\nu_k$  telles que  $Q_k(x, \cdot) \leq c_k \nu_k$ .*

-  $\pi_k$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $f_k \in W^{2,1}$ , vérifiant  $\|f_k\|_{2,1} \leq D_k$ , avec  $D_k$  variable aléatoire positive mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $Y_{1:k-1}$ .

Alors

$$\sup_{\|\phi\|=1} \mathbb{E}[| \langle \pi_t - \pi_t^{N,h}, \phi \rangle | | Y_{1:t} ] \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + \frac{2}{\sqrt{N}}] \sum_{k=2}^{t+1} \beta_{k+1:t} \bar{\gamma}_{k:n} \gamma_{k-1} c_k$$

Comme pour le filtre pré-régularisé, le cas de la convergence en variation totale a aussi été étudié :

**Théorème 2.5.6** Soit  $K$  un noyau de régularisation d'ordre 2. Si pour tout  $k = 1, \dots, t$  :

- La vraisemblance moyenne est bornée inférieurement, et la vraisemblance est bornée supérieurement : il existe  $m_k > 0$  et  $M_k < \infty$  tels que  $m_k = \inf_{x \in E} < Q_k(x, \cdot), \Psi_k >$  et  $M_k = \sup_{x \in E} \Psi_k(x)$ . Soit  $\gamma_k = M_k/m_k$  et  $\gamma_{n:m} = \gamma_n \gamma_{n+1} \cdots \gamma_m$

-  $\pi_k$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, avec comme densité  $f_k \in W^{2,1}$ , vérifiant  $\|f_k\|_{2,1} \leq D_k$ , avec  $D_k$  variable aléatoire positive mesurable par rapport à la  $\sigma$ -algèbre engendrée par  $Y_{1:k-1}$ .

- Pour tout  $x \in E$ ,  $I_k = \sup_{x \in E} \int_{\mathbb{R}^d} |u|^{d+1} |Q_k(x, u)| du < \infty$

Alors

- Si  $K \in L^2$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{d+1} |K(x)| dx < \infty$  :

$$\mathbb{E}[| \pi_t - \pi_t^{N,h} | | Y_{1:t} ] \leq [h^2 a_2 D_{max} + 2^{(d+1)/2} \gamma_{max} A_d \frac{(1 + I_{max}) \|K\|_2^{1/2}}{\sqrt{N} h^d}] \sum_{k=1}^t \beta_{k:t} \bar{\gamma}_{k:t}$$

Si  $K \in L^p$  et  $\int_{\mathbb{R}^d} |x|^{d+1} |K(x)| dx < \infty$  :

$$(\mathbb{E}[| \pi_t - \pi_t^{N,h} |^p | Y_{1:t} ])^{1/p} \leq 2[h^2 a_2 D_{max} + 2 \gamma_{max} C'_{p,d} \frac{(1 + I_{max}) \|K\|_p^{1/2}}{\sqrt{N}^{1/4} h^{d(p-1)/(2p)}}] \sum_{k=1}^t \beta_{k:t} \bar{\gamma}_{k:t}$$

avec  $I_{max} = \max_{1 \leq k \leq t} I_k$ ,  $\gamma_{max} = \max_{1 \leq k \leq t} \gamma_k$ ,  $A_d$  constante uniquement dépendante de  $N$  et  $C'_{p,d} = 2^{(d/2+1)} \sqrt{3} \left( \frac{8^{p/2}}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \right)^{1/(2p)} A_d$

**Remarque :** Oudjane([104]) et LeGLand & Oudjane([95]) ont aussi étudié le cas où le noyau d'évolution du filtre optimal est mélangeant. Ils obtiennent des résultats de convergence uniforme.

## 2.6 Conclusion du deuxième chapitre

Dans ce chapitre, les différentes approches utilisées pour les problèmes de filtrage ont été présentées. Hors du contexte des systèmes dynamiques linéaires où le filtre de Kalman est la solution du problème, il n'est pas possible de calculer exactement le filtre optimal. Le recours aux approximations est donc inévitable pour le problème général du filtrage non linéaire. La première approximation introduite est le filtre de Kalman étendu qui peut fonctionner correctement ou tout aussi bien diverger. Comme il ne s'appuie sur aucun résultat théorique, il n'y a aucune garantie de comportement. Les nombreuses variantes du filtre de Kalman étendu (cf. Chen [21]), visant à stabiliser son comportement, n'ont pas été présentées ici, car elles aussi ne possèdent pas de support théorique et ne sont d'aucun intérêt pour notre approche.

Parmi les autres approximations du filtre optimal, les filtres de Monte Carlo ou filtres particuliers tiennent une place importante. Ces méthodes ont été présentées de manière détaillée pour plusieurs raisons. D'une part, elles conjuguent propriétés théoriques et bonnes performances en pratique et, d'autre part, notre approche est bâtie suivant le même principe d'approximation par simulation.

Cependant, ces filtres particuliers ont quelques faiblesses. Pour les filtres classiques, tels que le filtre de Monte Carlo pondéré ou tous les filtres issus de la procédure SIS, pour un nombre de particules constant dans le temps, il est quasiment inévitable d'observer la divergence du filtre en temps long. Les filtres de deuxième génération issus de la procédure SIS-R, tels que le filtre particulier avec interaction, réduisent ce problème de divergence mais ne le corrigent pas complètement, surtout pour les systèmes faiblement bruités. Le phénomène de divergence étant attribué au caractère discret des approximations fournies par les filtres, la dernière amélioration des filtres consiste alors à régulariser la mesure empirique obtenue. La dégénérescence des particules est ainsi évitée, puisque les étapes d'échantillonnage s'effectuent sur des densités.

Les filtres particuliers régularisés constituent donc les filtres particuliers les plus performants. Malgré tout, comme leurs prédécesseurs ils sont sensibles à la faiblesse du bruit. Pour le cas extrême, où l'observation n'est pas bruitée aucun des

filtres particuliers ne peut être rigoureusement calculé.

Notre approche, présentée dans le chapitre suivant, est le prolongement naturel de cette idée de régularisation. Plutôt que de passer par des mesures discrètes, nous proposons de travailler directement sur des densités. Les problèmes liés au caractère discret des mesures sont ainsi naturellement éludés et de plus, il est possible de filtrer, en toute rigueur, des systèmes dynamiques dont les observations ne sont pas bruitées. Mais l'avantage essentiel de notre approche est d'affaiblir les hypothèses de mise en oeuvre. En effet, pour tous les filtres particuliers, il est nécessaire de connaître la forme analytique de la vraisemblance des observations alors que, pour nos approches, il est seulement nécessaire de pouvoir générer des observations selon une loi donnée.



## **Deuxième partie**

### **Utilisation des noyaux de convolution en filtrage particulaire**



## Chapitre 3

# Estimation de la densité du filtre optimal pour un système dynamique non linéaire

L'objectif du filtrage est d'estimer la densité conditionnelle de l'état sachant les observations, c'est à dire la densité de  $x_t|y_t, \dots, y_1$ . Les nouveaux filtres que nous proposons s'appuient sur des estimateurs à noyaux. En effet, selon la théorie de l'estimation fonctionnelle, en convoluant des noyaux à des mesures empiriques, il est possible d'estimer de manière convergente des densités de probabilité.

Dans un premier temps, les objets fondamentaux de l'estimation fonctionnelle sont donc introduits, leurs propriétés théoriques utiles à nos approches sont données dans l'annexe A.1.

Puis, dans le reste du chapitre, sont présentés les différents filtres que nous avons construits à partir de noyaux de convolution. Le premier est le filtre par noyau à mémoire complète. Il est l'analogue du filtre de Monte Carlo pondéré. Le second est une variante à mémoire limitée, l'analogue du filtre de Monte Carlo à mémoire limitée. Ensuite, le filtre avec sélection est introduit ; sa particularité est d'effectuer un tri sur les particules simulées. La présentation de nos filtres se termine sur le filtre par noyau avec ré-échantillonnage. Il correspond aux filtres issus de SIS-R et plus particulièrement aux filtres régularisés.

Avant d'entamer la présentation des filtres à convolution, il est important de préciser un dernier point. Nous avons pris le parti d'estimer la densité conditionnelle de l'état à l'instant  $t$ ,  $p(x_t|y_t, \dots, y_1)$ , mais toutes les approches présentées s'adaptent immédiatement à l'estimation de la densité conditionnelle de toute la

trajectoire des états,  $p(x_t, \dots, x_1 | y_t, \dots, y_1)$ . Sur le plan théorique, cela n'a quasiment aucune conséquence, la seule différence majeure est sur le plan pratique. En effet, il est alors nécessaire de conserver en mémoire (dans l'ordinateur), tous les "ancêtres" de l'état de chacune des particules, ce qui peut devenir problématique en temps long.

De plus, en suivant le même principe d'estimation fonctionnelle, il serait possible d'estimer  $p(x_{t+l} | y_t, \dots, y_1)$ , la densité prédictive de l'état à  $l$  pas en avant.

### 3.1 Notations relatives à l'estimation non paramétrique par noyaux de convolution

Les noyaux de convolution forment une famille d'applications adaptée à l'estimation de fonctions. Ils sont souvent notés  $K$ , de l'anglais Kernel.

**Définition :** Un noyau  $K$  est une application de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée, positive, symétrique, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et d'intégrale 1.

La contrainte de positivité imposée ici au noyau n'est pas obligatoire. Il est possible d'utiliser des noyaux négatifs sur une partie de leur support. Les estimateurs à noyaux de convolution étant utilisés dans cette thèse comme des outils au service du filtrage, il n'est pas nécessaire de se placer dans le contexte le plus général. Une grande variété de résultats est ainsi plus aisément accessible.

**Définition :** Un noyau de Parzen-Rosenblatt est un noyau vérifiant

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^d K(x) = 0$$

**Définition :** L'estimateur  $f_n$  associé à  $K$  de la densité  $f$  des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes identiquement distribuées, est

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) = (K_{h_n} * \mu_n)(x) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où  $h_n$  est un réel lié à  $n$ , souvent appelé largeur de la fenêtre, et  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$  est la mesure empirique associée aux  $X_1, \dots, X_n$ . En d'autres termes,  $f_n$  est la densité empirique obtenue en régularisant la mesure empirique des  $X_1, \dots, X_n$ , par convolution avec  $\frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{\cdot}{h_n}\right)$ . Par commodité, la notation suivante est introduite

$$K_{h_n}(y) = \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{y}{h_n}\right) \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Les résultats de convergences de  $f_n$  vers  $f$ , sous différents modes, sont obtenus en rajoutant différentes hypothèses sur le noyau. Nous ne rappelons ici que les résultats utiles à notre approche du filtrage.

Avant d'énoncer des résultats précisant la vitesse de convergence, il est nécessaire d'introduire comme dans ([51],[78]) quelques notations et notions particulières. Pour clarifier la lecture rappelons que  $d$  est la dimension de  $x$ .

Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $D_i f = \partial f / \partial x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^d$ , rappelons les notations :

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_d! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \\ D^\alpha f &= D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} f \end{aligned}$$

Enfin, l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées partielles au sens des distributions  $D^\alpha f$ , avec  $|\alpha| \leq s$ , sont intégrables, est noté  $W^{s,1}$ .

**Définition 3.1.1 (Noyau de classe  $s$ )** Soit  $s \geq 1$ . Un noyau de classe  $s$  est une fonction Borel-mesurable  $K$  telle que

- (i)  $K$  est symétrique, i.e.,  $K(-x) = K(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^d$
- (ii)  $\int K = 1$
- (ii)  $\int x^\alpha K(x) dx = 0$  si  $1 \leq |\alpha| \leq s - 1$
- (iv)  $\int x^\alpha |K(x)| dx < \infty$  si  $|\alpha| = s$

$K$  peut être négatif, ce n'est donc pas forcément une densité.

## 3.2 Filtre par noyau à mémoire complète

Le type de formalisation du système dynamique discret n'a pas un rôle important pour notre approche, elle est très souple, il doit pouvoir s'écrire sous la forme :

$$S : \begin{cases} x_t \sim Q_t(x_{t-1}, \cdot) \\ y_t \sim G_t(x_t, \cdot) \end{cases} \quad (3.1)$$

Plus précisément, il n'est pas nécessaire de connaître la forme analytique de  $Q_t$  et  $G_t$ . Il suffit d'être capable de simuler des couples  $(x_t, y_t)$ .

Par exemple, il est possible de considérer un système de la forme classique suivante :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad (3.2)$$

Les objets suivants du système (3.2) sont toujours supposés connus, à chaque instant  $t$  :

- $\pi_0$  la distribution de probabilité de l'état initial  $x_0$ .
- $f_t$  la fonction d'évolution du modèle d'état.
- $h_t$  la fonction d'observation.
- $\varepsilon_t \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_t}$  la loi de probabilité, simulable, de  $\varepsilon_t$ .
- $\eta_t \sim \mathcal{L}_{\eta_t}$  la loi de probabilité, simulable, de  $\eta_t$ .

**Remarque :** Ces hypothèses sont semblables à celles requises par les filtres de Monte Carlo, à l'exception de la dernière qui est plus faible. En effet, la mise en place des algorithmes de Monte Carlo suppose que l'on connaisse toujours la forme analytique de la densité de  $\mathcal{L}_{\eta_t}$ .

Conservons les notations utilisées dans la partie relative aux filtres particuliers :  $\pi_t$  désigne la mesure de probabilité de  $x_t|y_{1:t}$ , c'est à dire le filtre optimal. Pour notre approche, supposons que cette mesure admet une densité notée  $p(x_t|y_{1:t})$ . Or par définition, la densité conditionnelle est le quotient de la densité conjointe de  $x_t, y_{1:t}$  par la densité marginale de  $y_{1:t}$  :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})}.$$

Notre approche consiste donc à estimer les densités  $p_{XY}$  et  $p_Y$  par la méthode des noyaux de convolution. Les estimateurs construits à partir de ces méthodes nécessitent beaucoup d'observations pour être de bonne qualité. En général, dans les situations de filtrage, les couples  $(x_t, y_t)$  ne sont pas accessibles puisque  $x_t$  n'est pas observé. Mais on a suffisamment d'information sur le système (3.2) pour en générer autant qu'on le désire. La formalisation du problème selon le point de vue de l'estimation fonctionnelle permet d'éclairer ce point :

- Notons  $z_t = (x_t, y_{1:t})$
- Pour tout  $t$ , il existe une mesure  $\mu_t$ , telle que  $z_t \sim \mu_t$
- Pour tout  $t$ , il existe une mesure  $\nu_t$ , telle que  $y_{1:t} \sim \nu_t$

Pour calculer  $p_{XY}^n$  une estimation par noyau de convolution de la densité  $p_{XY}$ , il faut générer  $n$  représentants de  $\mu_t$ . On procède de la manière suivante :

- Génération de  $n$  états initiaux  $\tilde{x}_0^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), suivant la loi  $\pi_0$ .
- Evolution des  $n$  états initiaux  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$  (3.2),  $t$  fois successivement et générations “d’observations” correspondantes  $\tilde{y}_{1:t}^i = \tilde{y}_1^i, \dots, \tilde{y}_t^i$ , selon le modèle  $S$ .

On obtient ainsi  $n$ ,  $\tilde{z}_t^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  qui sont des représentants de  $\mu_t$ . Grâce à ces derniers, on construit une estimation empirique de  $\mu_t$  :

$$\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{z}_t^i}.$$

Pour obtenir l’estimation de la densité  $p_{XY}$  il suffit de convoluer cette mesure empirique avec un noyau  $K$  :

$$p_{XY}^n(z_t) = K_{h_n} * \mu_t^n(z_t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_t - \tilde{z}_t^i)$$

L’estimation de  $p_Y$  s’effectue de la même manière avec les mêmes observations simulées. Ainsi l’estimation empirique de  $\nu_t$  est définie par

$$\nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$$

et celle de la densité  $p_Y$  par

$$p_Y^n(y_{1:t}) = K_{h_n} * \nu_t^n(y_{1:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i).$$

Finalement, on obtient une estimation de  $p(x_t|y_{1:t})$  en effectuant le quotient des deux estimations précédentes :

$$\begin{aligned} p^n(x_t|y_{1:t}) &= \frac{p_{XY}^n(z_t)}{p_Y^n(y_{1:t})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_t - \tilde{z}_t^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)} \end{aligned}$$

Les noyaux convolution  $K_{h_n}$  intervenant au dénominateur et au numérateur bien que notés de la même façon sont différents ( $z_t = (x_t, y_{1:t}) \in \mathbb{R}^{tq+d}$  et  $y_{1:t} \in \mathbb{R}^{tq}$ ).

$\mathbb{R}^{tq}$ ). On ne les a pas différenciés jusqu'à présent car ils jouent le même rôle. Mais pour l'étude de certaines propriétés théoriques il est nécessaire de les différencier. Notons  $K^1$  le noyau mis sur les  $x_t$  et  $K^2$  le noyau mis sur les  $y_{1:t}$ , ce qui donne pour l'estimation de la densité conditionnelle de  $x_t$  sachant  $y_{1:t}$  :

$$p^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}$$

L'expression ci-dessus est la conséquence du choix d'un noyau  $K_{h_n}(z_t - \tilde{z}_t^i)$  de la forme  $K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)$ .

## Convergence ponctuelle

Les démonstrations réalisées dans cette partie généralisent les résultats obtenus par Youndjé ([134],[135]) et les adaptent au contexte du filtrage. Les résultats de Youndjé s'appliquent exclusivement au contexte de l'estimation fonctionnelle classique à partir d'une base de couples observés  $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n) \in \mathbb{R}^2\}$ . De plus, il est utile de préciser que les résultats de Youndjé s'inspirent des idées développées par Bosq et Lecoutre ([14]).

### Théorème 3.2.1 (convergence ponctuelle en moyenne quadratique)

*Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{1:t}$  et si  $p(x_t|y_{1:t})$  est bornée alors*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{tq+d} = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})]^2 = 0$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables simulées  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , pour une trajectoire d'observations  $y_{1:t}$  fixée.

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t}) &= \frac{p^n(x_t|y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} \left( \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] - p_Y^n(y_{1:t}) \right) \\
&\quad + \frac{p_{XY}^n(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} - p(x_t|y_{1:t}) \\
&= \frac{p^n(x_t|y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} \left( \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] - p_Y^n(y_{1:t}) \right) \\
&\quad + \frac{p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} \\
&\quad + \left( \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} \right)
\end{aligned}$$

D'après le Lemme A.1.1 (Bochner) on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \rightarrow 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] = p_Y(y_{1:t})$$

ce qui entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} \right) = 0.$$

De plus le théorème A.1.1 prouve que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n \rightarrow 0, \lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^{tq+d} \rightarrow \infty \Rightarrow \mathbb{E}[p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})]^2 = 0$$

soit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[ \frac{p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} \right]^2 \rightarrow 0.$$

Il ne reste plus qu'à étudier le comportement de

$$\mathbb{E} \left[ \frac{p^n(x_t|y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} \left( \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] - p_Y^n(y_{1:t}) \right) \right]^2$$

Majorons tout d'abord l'estimation de la densité conditionnelle :

$$\begin{aligned}
p^n(x_t|y_{1:t}) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)} \\
&= \sum_{i=1}^n W_i K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i)
\end{aligned}$$

avec

$$W_i = \frac{K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)} \quad i = 1, \dots, n$$

En appliquant l'inégalité de Jensen, on aboutit à

$$p^n(x_t|y_{1:t})^2 \leq \sum_{i=1}^n W_i K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i)^2$$

on obtient alors

$$\begin{aligned} & \mathbb{E} \left[ p^n(x_t|y_{1:t})^2 (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n)^2 | \tilde{y}_{1:t}^1, \dots, \tilde{y}_{1:t}^n \right] \\ & \leq \sum_{i=1}^n W_i (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n)^2 \mathbb{E} \left[ K_{h_n}^1(x_t, \tilde{x}_t^i)^2 | \tilde{y}_{1:t}^i \right] \\ & = \sum_{i=1}^n W_i (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n)^2 \int K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i)^2 p(\tilde{x}_t^i | \tilde{y}_{1:t}^i) d\tilde{x}_t^i \\ & = \frac{1}{h_n^d} \sum_{i=1}^n W_i (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n)^2 \int K^1(u)^2 p(\tilde{x}_t + u h_n | y_{1:t}) du \\ & \leq \frac{M(y_{1:t})}{h_n^d} (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n)^2 \int K^1(u)^2 du \end{aligned}$$

où  $M(y_{1:t}) = \sup_{x_t} p(x_t|y_{1:t})$ . Et d'après la démonstration du théorème A.1.1

$$n h_n^{tq} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] - p_Y^n(y_{1:t}) \right]^2 \rightarrow p_Y(y_{1:t}) \int K^2(u)^2 du.$$

On en déduit finalement

$$\begin{aligned} & n h_n^{tq+d} \mathbb{E} \left[ \frac{p_{X|Y}^n}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]} (\mathbb{E}[p_Y^n] - p_Y^n) \right]^2 \\ & \leq \frac{M(y_{1:t}) n h_n^{tq} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})] - p_Y^n(y_{1:t}) \right]^2 \int K^1(u)^2 du}{\mathbb{E}[p_Y^n(y_{1:t})]^2} \\ & \rightarrow \frac{M(y_{1:t}) \int K^1(u)^2 du \int K^2(u)^2 du}{p_Y(y_{1:t})} \end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration.

**Théorème 3.2.2 (convergence ps)** *Si les deux noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, positifs et bornés, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{1:t}$  et si  $p(x_t, y_{1:t})$  est continue au point  $(x_t, y_{1:t})$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x_t|y_{1:t}) = p(x_t|y_{1:t}) \quad ps$$

**Démonstration :** On a

$$p^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{p^n(x_t, y_{1:t})}{p^n(y_{1:t})}$$

Le théorème A.1.2 assure que sous les hypothèses du théorème 3.2.2 :

$$\begin{aligned} p^n(x_t, y_{1:t}) &\rightarrow p(x_t, y_{1:t}) \quad ps \\ p^n(y_{1:t}) &\rightarrow p(y_{1:t}) \quad ps \end{aligned}$$

Comme par hypothèse  $p(y_{1:t}) > 0$  on en déduit le résultat.

### Convergence uniforme

**Théorème 3.2.3 (convergence  $L_1$  ps)** *Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, positifs et bornés, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{1:t}$  et si  $x_t \mapsto p(x_t, y_{1:t})$  est continue presque partout, alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Le résultat découle du théorème 3.2.2 et du théorème de Glick A.1.4.

Pour l'étude de la vitesse de convergence  $L_1$  intégrée, dans le théorème ci-dessous, nous considérons le noyau  $\tilde{K}^1 = K^1 K^2$ , utilisé pour estimer la loi conjointe de  $(x_t, y_{1:t}) = z_t$ .

**Théorème 3.2.4 (vitesse de convergence  $L_1$  intégrée)** *Si les densités  $p_Y$  et  $p_{XY}$  appartiennent à  $W^{s,1}$  et les noyaux  $\tilde{K}^1 \in L_1(\mathbb{R}^{tq+d})$  et  $K^2 \in L_1(\mathbb{R}^{tq})$  sont de classe  $s \geq 1$ . Si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a pour  $(K, f, a) = \{(\tilde{K}^1, p_{XY}, tq + d), (K^2, p_Y, tq)\}$ ,  $\int \|x\|^{a+\varepsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{a+\varepsilon}) f(x) dx < \infty$  alors pour tout  $h_n > 0$  on a*

$$\mathbb{E} \left[ \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t \right] = O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{tq+d}})$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables aléatoires simulées  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  et aussi par rapport à la trajectoire d'observations  $y_{1:t}$ .

**Démonstration :** Il n'est pas nécessaire de restreindre l'espérance à l'ensemble  $B_+ = \{y_{1:t} : p_Y(y_{1:t}) > 0\}$  car il est facile de voir que

$$\mathbb{E} \left[ \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t \right] = \mathbb{E}_{B_+} \left[ \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t \right].$$

Cependant, dans la suite, nous supposons que  $y_{1:t} \in B_+$  :

$$\begin{aligned} p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t}) &= \frac{p_{XY}^n(z_t)}{p_Y^n(y_{1:t})} - \frac{p_{XY}(z_t)}{p_Y(y_{1:t})} \\ &= \frac{p_{XY}^n}{p_Y^n} - \frac{p_{XY}}{p_Y} \\ &= \frac{p_{XY}^n p_Y - p_{XY} p_Y^n}{p_Y^n p_Y} \\ &= \frac{p_{XY}^n p_Y - p_{XY}^n p_Y^n + p_{XY}^n p_Y^n - p_{XY} p_Y^n}{p_Y^n p_Y} \\ &= \frac{p_{XY}^n (p_Y - p_Y^n) + p_Y^n (p_{XY}^n - p_{XY})}{p_Y^n p_Y} \\ &= \frac{1}{p_Y} \left[ p_{XY}^n - p_{XY} + (p_Y - p_Y^n) p_{X|Y}^n \right] \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| &\leq \frac{1}{p_Y(y_{1:t})} \left[ |p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})| \right. \\ &\quad \left. + |p_Y(y_{1:t}) - p_Y^n(y_{1:t})| p_{X|Y}^n(x_t|y_{1:t}) \right] \end{aligned}$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t &\leq \frac{1}{p_Y(y_{1:t})} \left[ \int |p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})| dx_t \right. \\ &\quad \left. + |p_Y(y_{1:t}) - p_Y^n(y_{1:t})| \int p_{X|Y}^n(x_t|y_{1:t}) dx_t \right] \\ &= \frac{1}{p_Y(y_{1:t})} \left[ \int |p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})| dx_t \right. \\ &\quad \left. + |p_Y(y_{1:t}) - p_Y^n(y_{1:t})| \right] \end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{y_{1:t}} \left[ \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t \right] \\ &= \iint |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t p_Y(y_{1:t}) dy_{1:t} \\ &\leq \iint |p_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})| dx_t dy_{1:t} \\ &\quad + \int |p_Y(y_{1:t}) - p_Y^n(y_{1:t})| dy_{1:t} \end{aligned}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\mathbb{E}_{y_{1:t}} [\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L_1}] \leq \|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1} + \|p_Y^n - p_Y\|_{L_1}$$

On en déduit

$$\mathbb{E} [\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L_1}] \leq \mathbb{E} [\|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1}] + \mathbb{E} [\|p_Y^n - p_Y\|_{L_1}].$$

d'après le corollaire A.1.10.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L_1}] &= O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{tq+d}}) + O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{tq}}) \\ &= O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{tq+d}}) \end{aligned}$$

**Remarques :** La qualité de l'estimation est liée au nombre  $n$  d'observations simulées. Plus la dimension des observations est grande plus  $n$  doit être grand. Or, ici, la dimension des observations  $y_{1:t}$  augmente avec le temps, ce qui s'exprime au travers des conditions  $h_n \rightarrow 0$  et  $nh_n^{tq+d} \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Ainsi, pour avoir une qualité stable dans le temps,  $n$  doit donc croître lorsque  $t$  croît. En pratique, cela est problématique car le temps de calcul augmente donc aussi avec le temps.

Il est donc impératif de modifier cette approche pour stabiliser le temps de calcul. Une première idée naturelle est de limiter la mémoire du filtre : ainsi pour un nombre constant  $n$  de données simulées la précision reste stable au cours du temps. Une autre idée, est de faire en sorte que les observations générées soient dans la zone intéressante de l'espace. Ce qui conduit à effectuer une sélection sur les observations simulées.

Nous détaillons ces deux approches dans la suite de ce chapitre.

### 3.3 Filtre par noyau à mémoire limitée

La formalisation du système dynamique discret est la même que pour le filtre à mémoire complète :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

Les quantités suivantes sont supposées connues :

$\pi_0$	la distribution de probabilité de l'état initial $x_0$ .
$f_t$	la fonction d'évolution du modèle d'état.
$h_t$	la fonction d'observation.
$\varepsilon_t \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_t}$	la loi de probabilité, simulable, de $\varepsilon_t$ .
$\eta_t \sim \mathcal{L}_{\eta_t}$	la loi de probabilité, simulable, de $\eta_t$ .

La limitation de la mémoire utilisée pour estimer le filtre optimal, bien que souvent effectuée en pratique (cf. §2.3.5), n'est en général pas rigoureuse. La justification de cette démarche nécessite l'ajout d'une hypothèse sur le système dynamique. Nous proposons l'hypothèse suivante :

$\forall \epsilon > 0, \exists T \in \mathbb{N} : \forall t \in \mathbb{N}^*,$

$$\sup_{y_1, \dots, y_t} \int |p(x_t | y_1, \dots, y_t) - p(x_t | y_{t-T}, \dots, y_t)| dx_t < \epsilon$$

Le théorème suivant permet de faire un lien entre la mélangeance du système dynamique et la limitation de la mémoire du filtre.

**Théorème 3.3.1** *Si les fonctions d'évolution de l'état,  $f_t$ , admettent des constantes de mélange  $c_t \in ]0, 1[$  (au sens de la définition 2.3.2), telles que  $c = \inf_{t \in \mathbb{N}} c_t > 0$  alors*

$$\sup_{y_t, \dots, y_1} \int |p(x_t | y_1, \dots, y_t) - p(x_t | y_{t-T}, \dots, y_t)| dx_t \leq (1 - c)^T$$

**Démonstration :** Ce résultat est démontré dans Del Moral([28]) p509-510.

Sous cette hypothèse forte, il est tout à fait légitime d'estimer  $p(x_t | y_{t-T:t}) = p(x_t | y_{t-T}, \dots, y_t)$  plutôt que  $p(x_t | y_1, \dots, y_t)$ . Par définition,

$$p(x_t | y_{t-T:t}) = \frac{p_{XY_T}(x_t, y_{t-T:t})}{p_{Y_T}(y_{t-T:t})}.$$

On va donc estimer les densités  $p_{XY_T}$  et  $p_{Y_T}$  de la même manière que dans le cas à mémoire complète. On utilise des notations et des hypothèses analogues :

- $z_{t,T} = (x_t, y_{t-T:t})$  pour  $t > T$  et  $z_{t,T} = (x_t, y_{1:t})$  sinon
- Pour tout  $t$  il existe une mesure  $\mu_{t,T}$  telle que  $z_{t,T} \sim \mu_{t,T}$
- Pour tout  $t$  il existe une mesure  $\nu_{t,T}$  telle que  $y_{t-T:t} \sim \nu_{t,T}$

Pour calculer  $p_{XY_T}^n$  et  $p_{Y_T}^n$  les estimations par convolution des densités  $p_{XY_T}$  et  $p_{Y_T}$ , on applique exactement la même procédure que dans la partie précédente :

- Génération de  $n$  états initiaux  $\tilde{x}_0^i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), suivant la loi  $\pi_0$ .
- Evolution des  $n$  états initiaux  $\tilde{x}_0^i$  suivant  $S$  (3.2),  $t$  fois successivement et générations d'observations correspondantes  $\tilde{y}_{t-T:t}^i = \tilde{y}_{t-T}^i, \dots, \tilde{y}_t^i$ , selon le modèle  $S$ .

On obtient ainsi  $n$  réalisations  $\tilde{z}_{t,T}^i = (\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t-T:t}^i)$  qui sont des représentants de  $\mu_{t,T}$ . Grâce à ces derniers, on construit les estimations empiriques de  $\mu_{t,T}$  et  $\nu_{t,T}$  :

$$\mu_{t,T}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{z_{t,T}^i} \quad \text{et} \quad \nu_{t,T}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{t-T:t}^i}$$

Pour obtenir les estimations des densités  $p_{XY_T}$  et  $p_{Y_T}$ , il suffit de convoluer ces mesures empiriques avec un noyau  $K$  :

$$p_{XY_T}^n(z_{t,T}) = K_{h_n} * \mu_t^n(z_{t,T}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_{t,T} - \tilde{z}_{t,T}^i)$$

et

$$p_{Y_T}^n(y_{t-T:t}) = K_{h_n} * \nu_{t,T}^n(y_{t-T:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i).$$

Finalement, en effectuant le quotient de ces deux estimations, on obtient une estimation de  $p(x_t|y_{t-T:t})$  :

$$\begin{aligned} p^n(x_t|y_{t-T:t}) &= \frac{p_{XY_T}^n(z_{t,T})}{p_{Y_T}^n(y_{t-T:t})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_{t,T} - \tilde{z}_{t,T}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i)} \end{aligned}$$

Pour l'étude de la convergence, travaillons à un instant  $t$  fixé et avec une mémoire de longueur  $T$  fixée. Soit l'estimation de  $p(x_t|y_{t-T:t})$  définie à l'aide des noyaux  $K^1$  et  $K^2$  de manière semblable au cas à mémoire complète :

$$\begin{aligned} p^n(x_t|y_{t-T:t}) &= \frac{p_{XY}^n(z_{t,T})}{p_Y^n(y_{t-T:t})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^1(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_n}^2(y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}^2(y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i)} \end{aligned}$$

## Convergence ponctuelle

### Théorème 3.3.2 (convergence ponctuelle en moyenne quadratique)

Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{t-T:t}$  alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{Tq+d} = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p^n(x_t|y_{t-T:t}) - p(x_t|y_{t-T:t})]^2 \rightarrow 0$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables simulées  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t-T:t}^i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ , pour une trajectoire d'observations  $y_{t-T:t}$  fixée.

**Démonstration :**

La démonstration est la même que celle du théorème 3.2.1.

**Théorème 3.3.3 (convergence ps)** *Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, positifs et bornés, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{t-T:t}$  et si  $p(x_t, y_{t-T:t})$  est continue au point  $(x_t, y_{t-T:t})$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{Tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x_t | y_{t-T:t}) = p(x_t | y_{t-T:t}) \quad ps$$

**Démonstration :** C'est la même démonstration que pour le théorème 3.2.2.

**Remarque :** L'avantage évident dans le cas à mémoire limitée est que le temps  $t$  n'intervient plus sur le nombre de trajectoires  $n$  à générer pour assurer la convergence asymptotique. Cependant, l'erreur commise en tronquant ainsi la mémoire du filtre est difficile à quantifier et dépend beaucoup de la nature du système étudié.

**Convergence uniforme**

**Théorème 3.3.4 (convergence  $L_1$  ps)** *Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, positifs et bornés, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{t-T:t}$  et si  $x_t \mapsto p(x_t, y_{t-T:t})$  est continue presque partout alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{Tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int |p^n(x_t | y_{t-T:t}) - p(x_t | y_{t-T:t})| dx_t = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Le résultat découle du théorème 3.3.3 et du théorème de Glick A.1.4.

Comme précédemment, pour l'étude de la vitesse de convergence  $L_1$  intégrée, nous considérons le noyau  $\tilde{K}^1 = K^1 K^2$ , utilisé pour estimer la loi conjointe de  $(x_t, y_{t-T:t}) = z_t$ .

**Théorème 3.3.5 (vitesse de convergence  $L_1$  intégrée)**

*Si les densités  $p_Y$  et  $p_{XY}$  appartiennent à  $W^{s,1}$  et les noyaux  $\tilde{K}^1 \in L_1(\mathbb{R}^{Tq+d})$  et  $K^2 \in L_1(\mathbb{R}^{Tq})$  sont de classe  $s \geq 1$ . Si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a pour*

$(K, f, a) = \{(\tilde{K}^1, p_{XY}, Tq+d), (K^2, p_Y, Tq)\}$ ,  $\int \|x\|^{a+\epsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{a+\epsilon}) f(x) dx < \infty$  alors pour  $h > 0$  on a

$$\mathbb{E} \left[ \int |p^n(x_t | y_{t-T:t}) - p(x_t | y_{t-T:t})| dx_t \right] = O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{Tq+d}})$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables aléatoires simulées  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{t-T:t}^i)$  et aussi par rapport à la trajectoire d'observations  $y_{t-T:t}$ .

**Démonstration :** C'est la même démonstration que celle du théorème 3.2.4.

**Remarque :** Le principal avantage de cette méthode est que la dimension des noyaux  $K$  est fixe. Le nombre  $n$  de trajectoires à générer peut rester constant au cours du temps.

Cependant, l'hypothèse, émise en début de partie, autorisant la troncature de la mémoire, est très difficile à vérifier en pratique. L'erreur commise par la troncature de la mémoire est donc difficile à quantifier. De plus, en pratique, comme pour le cas précédent, le filtre peut diverger si aucune des données simulées n'est voisine de la trajectoire observée.

La méthode la plus simple pour remédier à ce dernier problème, est de générer des trajectoires qui soient voisines de la trajectoire observée. A cette fin, il faut effectuer une sélection sur les trajectoires simulées. Nous avons bâti suivant ce principe le filtre présenté dans la partie suivante.

### 3.4 Filtre par noyau avec sélection

L'approche par filtres particulières avec interaction (cf. §.2.4.3) consiste grossièrement à sélectionner les particules qui ont le droit de continuer à vivre : à un instant  $t$ , les particules ont une probabilité d'évoluer au temps  $t + 1$  liée à leur vraisemblance par rapport aux observations. Concrètement, une particule très vraisemblable au temps  $t$  aura plusieurs descendants au temps  $t + 1$  et une particule peu vraisemblable a de fortes chances de ne pas en avoir.

Le problème pratique de cette approche est qu'il faut être en mesure de calculer la vraisemblance d'une particule. Dès que le bruit sur le modèle d'observation n'est plus additif cela peut être très compliqué. A fortiori l'absence de bruit est rédhibitoire. Un autre problème est que, si aucune des particules courantes n'est intéressante (vraisemblance nulle), le filtre va inévitablement diverger. Si le nombre de particules est grand, cet événement est peu probable, mais au fil du temps cette

probabilité augmente.

Nous avons choisi une méthode de sélection plus simple et plus brutale pour construire ce filtre. On cherche à estimer la densité  $p(x_t|y_{1:t})$  pour la suite  $y_{1:t}$  observée et elle seule. L'idéal serait de générer des trajectoires avec  $\tilde{y}_{1:t}^i = y_{1:t}$ , la séquence précisément observée. Malheureusement les trajectoires considérées sont des variables aléatoires continues, cela est donc impossible. Mais il est tout à fait possible de générer et de sélectionner des trajectoires dont les observations sont dans un voisinage de  $y_{1:t}$ . Ainsi on s'assure de toujours générer des trajectoires intéressantes et utilisables à des fins d'estimation.

Considérons toujours le système suivant :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

A chaque instant  $t$ , il existe une mesure  $\mu_t$  telle que  $(x_t, y_{1:t}) \sim \mu_t$ . Pour estimer la densité  $p(x_t|y_{1:t})$  cherchons  $n$  réalisations de  $\mu_t$ ,  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  où  $i = 1, \dots, n$  telles que  $\tilde{y}_{1:t}^i \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  avec

$$\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}) = \{\tilde{y}_{1:t} \in \mathbb{R}^{q \times t} : \forall l = 1, \dots, t \|\tilde{y}_l - y_l\| \leq \epsilon\}$$

Les états  $\tilde{x}_t^i$ , permettent de construire une estimation de la densité conditionnelle  $p(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  qui est d'autant plus proche de la densité recherchée  $p(x_t|y_{1:t})$  que  $\epsilon$  est proche de zéro. Nous proposons dans la suite, une méthode stable en temps de calcul, intuitive et simple produisant de tels états.

### Génération d'observations sous contraintes

Une fois le nombre  $n$  de données fixé, une méthode naïve pour les générer consiste à simuler des trajectoires de longueur  $t$  suivant le système  $S$  jusqu'à obtenir  $n$  telles que leur vecteur d'observation respectif vérifie  $\tilde{y}_{1:t} \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ . Evidemment une telle approche n'est pas optimale, puisque dès qu'une des  $t$  observations  $\tilde{y}_l$  de la trajectoire  $\tilde{y}_{1:t}$  ne vérifie pas  $\|\tilde{y}_l - y_l\| < \epsilon$ , ce n'est pas la peine de continuer à la faire évoluer puisqu'elle sera rejetée. L'algorithme (tab. 3.1) prend en compte cette considération.

Soit un instant  $t$  fixé, posons  $i = 1$  :

Tant que  $i \leq n$

$k = 1$  Initialisation

$$x'_0 \sim \pi_0$$

$$S : x'_0 \rightarrow (x'_1, y'_1)$$

Si  $\|y'_1 - y_1\| < \epsilon : k = k + 1$

Sinon : retour à l'initialisation

$k > 1$

$$S : x'_{k-1} \rightarrow (x'_k, y'_k)$$

Si  $\|y'_k - y_k\| < \epsilon$  et  $k = t : \tilde{x}_t^i = x'_k$  et  $i = i + 1$

Si  $\|y'_k - y_k\| < \epsilon$  et  $k < t : k = k + 1$

Sinon : retour à l'initialisation

fin du Tant que

TAB. 3.1 – Algorithme de filtre avec sélection simple

**Remarque :** Nous avons ainsi construit un algorithme qui évite de faire évoluer certaines des trajectoires inutiles. En effet, dès qu'une observation de la trajectoire sort du tube on cesse de la faire évoluer. Cependant, il présente un problème, le temps de calculs requis augmente avec  $t$ , ce qui n'est pas compatible avec le filtrage en ligne.

En conséquence, en pratique il serait préférable de modifier cet algorithme. Par exemple, en considérant simultanément un ensemble d'états, et de ne pas faire évoluer systématiquement tous les états  $\tilde{x}_{t-1}^i, i = 1, \dots, n$  vers l'instant suivant mais plutôt d'effectuer un tirage aléatoire de taille  $n$  parmi ceux dont les observations sont dans le tube. De cette manière le temps de calcul serait stabilisé par rapport à  $t$ , mais un autre problème est introduit : les particules ainsi générées ne seront plus indépendantes.

Bien que les variantes de l'algorithme semblent plus intéressante en pratique, l'étude des propriétés théorique est seulement réalisée pour l'algorithme simple (tab. 3.1).

Les réalisations d'états obtenues à l'aide de l'algorithme (tab. 3.1),  $\tilde{x}_t^i, i = 1, \dots, n$  sont des représentants de la mesure  $\tilde{\pi}_t(dx) = P(X_t \in dx | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$ . On

peut ainsi construire l'estimation empirique

$$\tilde{\pi}_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i}.$$

On est alors en mesure d'estimer la densité  $p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  en convoluant cette mesure empirique. On obtient ainsi l'estimation :

$$p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_t - \tilde{x}_t^i)$$

L'obtention du résultat suivant est immédiate :

### **Théorème 3.4.1 (convergence en moyenne quadratique)**

*Si le noyau  $K$  est de Parzen-Rosenblatt, alors*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))]^2 = 0$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables simulées pour une trajectoire d'observation  $y_{1:t}$  fixée.

#### **Démonstration :**

Ce résultat est une application directe du théorème A.1.1

**Remarque :** Il est possible, en ajoutant quelques hypothèses, de construire une estimation de  $p(x_t | y_{1:t})$ . Cette approche est développée dans la suite. Pour ce faire, il faut caractériser la proximité entre  $p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  et la densité que l'on cherche à estimer :  $p(x_t | y_{1:t})$ . Dans cette optique, exprimons tout d'abord  $p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  comme une densité conditionnelle ponctuelle :

**Lemme 3.4.1** *Si  $p_Y$  et  $p_{XY}(x_t, \cdot)$  sont continues sur  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  alors il existe  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathcal{B}_\epsilon(0_{\mathbb{R}^t})$  tel que*

$$p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) = \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t} + \epsilon_2)}{p_Y(y_{1:t} + \epsilon_1)}$$

**Démonstration :** D'après le théorème de Bayes

$$p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) = \frac{\int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t}) du_{1:t}}{\int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) du_{1:t}}$$

Par définition d'une intégrale

$$\text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \inf_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) \leq \int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) du_{1:t} \leq \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \sup_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t})$$

Comme  $p_Y$  est continue sur le compact  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ , il existe  $y_m, y_M \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  tels que  $p_Y(y_m) = \inf_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t})$  et  $p_Y(y_M) = \sup_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t})$ . L'expression précédente s'écrit aussi

$$\text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) p_Y(y_m) \leq \int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) du_{1:t} \leq \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) p_Y(y_M).$$

Soit la fonction

$$\begin{aligned} D : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \alpha &\mapsto \int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) du_{1:t} - \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) p_Y(y_m \times (1 - \alpha) + y_M \times \alpha) \end{aligned}$$

elle est continue,  $D(0) \geq 0$  et  $D(1) \leq 0$ . Il existe d'après le théorème des valeurs intermédiaires,  $\alpha_0 \in [0, 1]$  tel que  $D(\alpha_0) = 0$ . Comme  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  est convexe,  $\tilde{y} = (1 - \alpha_0) \times y_m + \alpha_0 \times y_M \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  et donc  $\tilde{y} - y_{1:t} = \epsilon_1 \in \mathcal{B}_\epsilon(0_{\mathbb{R}^t})$ .

Donc

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_Y(u_{1:t}) du_{1:t} = \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) p_Y(y_{1:t} + \epsilon_1).$$

Ce qui achève la première partie de la démonstration.

De même :

$$\text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \inf_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t}) \leq \int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t}) du_{1:t}$$

et

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t}) du_{1:t} \leq \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \sup_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t})$$

En appliquant exactement le même raisonnement que précédemment, on en déduit qu'il existe  $\epsilon_2 = \epsilon_2(x_t) \in \mathcal{B}_\epsilon(0_{\mathbb{R}^t})$  tel que

$$\int_{\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})} p_{XY}(x_t, u_{1:t}) du_{1:t} = \text{vol}(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) p_{XY}(x_t, y_{1:t} + \epsilon_2).$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.4.1.

**Théorème 3.4.2** Si pour tout  $x_t$ ,  $p_Y$  et  $p_{XY}(x_t, \cdot)$  sont continues sur  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |p(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))| = 0$$

**Démonstration :** D'après le lemme 3.4.1 on a

$$|p(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))| = \left| \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t} + \epsilon_2)}{p_Y(y_{1:t} + \epsilon_1)} \right|$$

comme  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0$  et que pour tout  $x_t$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0$  on a le résultat.

**Théorème 3.4.3** Si pour tout  $x_t$ ,  $p_Y$  et  $p_{XY}(x_t, \cdot)$  sont continues sur  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ , alors

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int |p(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))| dx_t = 0$$

**Démonstration :** D'après le lemme 3.4.1 on a

$$\begin{aligned} D(x_t, \epsilon) &= p(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \\ &= \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t} + \epsilon_2)}{p_Y(y_{1:t} + \epsilon_1)} \end{aligned}$$

Toujours d'après le lemme 3.4.1  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_1 = 0$  et pour tout  $x_t$ ,  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon_2 = 0$  on a donc  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D(x_t, \epsilon) = 0$  pour tout  $x_t$ .

D'après le théorème de Scheffe (Devroye[47] p2-p25)

$$\int |D(x_t, \epsilon)| dx_t = 2 \int D(x_t, \epsilon)_+ dx_t$$

avec

$$D(x_t, \epsilon)_+ = \begin{cases} D(x_t, \epsilon) & \text{si } D(x_t, \epsilon) > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

or pour tout  $x_t$   $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} D(x_t, \epsilon)_+ = 0$  et  $D(x_t, \epsilon) \leq p_{X|Y}$  le théorème de convergence dominée entraîne le résultat.

Comme nous l'avons évoqué précédemment,  $p^n(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  est aussi un estimateur de  $p(x_t|y_{1:t})$ , à condition que  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## Convergence ponctuelle

**Corollaire 3.4.3.1** *Si le noyau  $K$  est de Parzen-Rosenblatt alors*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ n \rightarrow \infty}} \mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})]^2 = 0$$

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables simulées pour une trajectoire d'observation  $y_{1:t}$  fixée.

### Démonstration :

$$\mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})]^2 \leq \mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))]^2 + [p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})]^2$$

Or d'après le théorème 3.4.1, pour tout  $\epsilon \in \mathbb{R}_+$  on a

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))]^2 = 0$$

et d'après le théorème 3.4.2 on a aussi

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} [p(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})]^2 = 0$$

On en déduit le résultat.

Ces résultats sont très intéressants puisqu'ils assurent la convergence du filtre avec sélection vers le filtre optimal. De plus, l'asymptotique de la convergence est indépendante du temps  $t$ . Cependant il ne faut pas perdre de vue que ce gain théorique se traduit par une augmentation significative du temps de calcul en pratique.

Le résultat du corollaire précédent peut aussi s'obtenir d'une autre manière. Il suffit de considérer  $p^n(x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$  comme une forme particulière de l'estimation de la densité conditionnelle de  $x_t$  sachant  $y_{1:t}$ . Soit  $N$  le nombre de données qu'il a fallu générer pour en obtenir  $n$ ,  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  telles que  $\tilde{y}_{1:t}^i \in \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  pour  $i = 1, \dots, n$ . C'est à dire  $N$  correspond au nombre d'étape d'initialisation de l'algorithme (tab. 3.1). Alors en prenant pour  $K^2$  la densité uniforme sur la boule  $\mathcal{B}_1(0_{1:t})$  et  $h_N = \epsilon$ , l'estimation de  $p(x_t | y_{1:t})$  suivante :

$$p_{X|Y}^N(x_t|y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^N K_{h_N}^1(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_N}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^N K_{h_N}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}. \quad (3.3)$$

correspond bien à  $p^n(x_t|\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$ . Cette estimation (3.3), étant un filtre à mémoire complète, sa convergence est assujettie à l'hypothèse  $\lim_{N \rightarrow \infty} N h_N^{tq+d} = \infty$ . Ce nombre  $N$  est aléatoire mais dépend de  $n$  et  $\epsilon$ . Le lemme suivant précise le lien entre  $n$  et  $N$ , ce qui permettra, par la suite, d'obtenir certains résultats de convergence du filtre avec sélection. A présent, on va faire décroître  $\epsilon$  vers zéro en fonction de  $n$ , on introduit donc la notation  $\epsilon_n$ .

**Lemme 3.4.2** *Soit  $N$  le nombre de données qu'il aurait fallu générer pour en obtenir  $n$ ,  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  telles que  $\tilde{y}_{1:t}^i \in \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  pour  $i = 1, \dots, n$ . Si la densité des observations  $P_Y$  est continue sur  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  et positive en  $y_{1:t}$ , si  $K^2$  est un noyau symétrique à support compact alors on peut trouver  $h_N$  de la forme  $h_N = \epsilon_n/\delta$  tel que  $K_{h_N}$  soit nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  et lorsque  $n \rightarrow \infty$ , il existe  $b \in \mathbb{R}^+$  tel que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N h_N^{tq}} = b \quad ps$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}}} \times \frac{\log N}{N h_N^{tq}} = b \quad ps$$

#### Démonstration :

Tout d'abord, si  $K^2$  est un noyau à support compact symétrique, il existe  $\delta > 0$  tel que pour tout  $\|x\| > \delta$ ,  $K^2(x) = 0$  et si  $\|x\| \leq \delta$  alors  $K^2(x) > 0$ . En prenant,  $h_N = \epsilon_n/\delta$ , on a bien que  $K_{h_N}^2$  est nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ , ce qui montre le premier point.

D'après la loi forte des grands nombres pour  $\epsilon$  fixé,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n/N = \lim_{n \rightarrow \infty} P(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})) \quad ps$$

Autrement dit,  $n/N$  correspond à l'estimateur empirique de la proportion  $P(\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t}))$ . Pour s'assurer de la convergence de  $n/N$  vers  $P(\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t}))$ , lorsque  $\epsilon_n$ , il est nécessaire que la convergence de l'estimateur de la proportion soit uniforme. Le lemme suivant garantit ce résultat :

**Lemme 3.4.3** Soit  $p_n$  l'estimateur empirique d'une proportion  $p$ , on a

$$P\left(\sup_{p \in [0,1]} |p_n - p| > \varepsilon\right) \leq 8(n+1) \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{32}\right\}$$

i.e.  $p_n$  converge uniformément p.s., en  $p$ , vers  $p$ .

**Démonstration du Lemme :** Le résultat repose sur le théorème de Vapnik & Chervonenkis (cf. Devroye & al. [50]). On a

$$P\left(\sup_{p \in [0,1]} |p_n - p| > \varepsilon\right) = P\left(\sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu_n(A) - \nu(A)| > \varepsilon\right)$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{[0, p]; p \in [0, 1]\} \\ \nu(A) &= P(Z_i \in A | Z_i \sim \mathcal{U}[0, 1]) = p \\ \nu_n(A) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_A(Z_i) = p_n \end{aligned}$$

D'après le théorème de Vapnik & Chervonenkis, on a l'inégalité suivante

$$P\left(\sup_{A \in \mathcal{A}} |\nu_n(A) - \nu(A)| > \varepsilon\right) \leq 8s(\mathcal{A}, n) \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{32}\right\}$$

où  $s(\mathcal{A}, n) = n + 1$  est le coefficient de recouvrement de  $\mathcal{A}$  ("the shatter coefficient").

Comme la série de terme général  $8(n+1) \exp\left\{-\frac{n\varepsilon^2}{32}\right\}$  est convergente, on a que la convergence de  $p_n$  vers  $p$  est presque sûrement uniforme en  $p$ .

**Fin de la démonstration du Lemme.**

D'autre part, d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\begin{aligned} \frac{\int_{\mathcal{B}_{\varepsilon_n}(y_{1:t})} p_Y(u) du}{\varepsilon_n^{tq}} &= \frac{P(\mathcal{B}_{\varepsilon_n}(y_{1:t}))}{\varepsilon_n^{tq}} \\ &\rightarrow p_Y(y_{1:t}) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Comme  $n/N \rightarrow P(\mathcal{B}_{\varepsilon_n}(y_{1:t}))$  presque sûrement, on en déduit

$$\frac{n}{N\varepsilon_n^{tq}} \rightarrow p_Y(y_{1:t}) \quad p.s. \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

Si on pose  $b = p_Y(y_{1:t})$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{N \epsilon_n^{tq}} = b \quad p.s.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \epsilon_n^d}{N \epsilon_n^{tq+d}} = b \quad p.s.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \epsilon_n^d}{N h_N^{tq+d}} = b \delta^{tq+d} \quad p.s.$$

Montrons à présent le second point : on a

$$n \approx b N \epsilon_n^{tq} \quad p.s. \quad \text{lorsque } n \approx \infty$$

on en déduit

$$\log N \approx \log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}} - \log b \quad p.s. \quad \text{lorsque } n \approx \infty$$

soit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log N}{\log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}}} = 1 \quad p.s.$$

Finalement

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}}} \times \frac{\log N}{N h_N^{tq}} = b \quad p.s.$$

**Théorème 3.4.4** *Les observations sont supposées générées suivant l'algorithme de sélection sur la boule  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- Les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt
- La densité des observations  $p_Y$  est bornée et est continue sur  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$
- $K^2$  est un noyau symétrique à support compact
- $h_N$  est tel que  $K_{h_N}^2$  soit nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$

*Alors presque sûrement*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n \epsilon_n^d = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})]^2 = 0$$

L'espérance est calculé par rapport à toutes les variables simulées, pour une trajectoire d'observations  $y_{1:t}$  fixée.

**Démonstration :**

Les  $n$  observations  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$  utilisées pour construire  $p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t}))$  sont issues de la loi  $\mu_t$  mais ne sont pas de bons représentants puisqu'elles sont issues d'un tri. Soit  $N$  le nombre d'observations  $(\bar{x}_t^i, \bar{y}_{1:t}^i)$  simulées pour en obtenir  $n$  dans  $\mathcal{B}_{\epsilon}(y_{1:t})$ . En prenant un noyau  $K^2$  à support compact et  $h_N$  tel que toutes les observations en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  aient un poids nul on peut écrire

$$\begin{aligned} p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) &= p_{X|Y}^N(x_t | y_{1:t}) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^N K_{h_N}^1(x_t - \bar{x}_t^i) K_{h_N}^2(y_{1:t} - \bar{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^N K_{h_N}^2(y_{1:t} - \bar{y}_{1:t}^i)} \end{aligned}$$

avec  $(\bar{x}_t^i, \bar{y}_{1:t}^i)$  de bons représentants de  $\mu_t$ , c'est à dire non triés. Cette démonstration s'inspire de la démonstration du théorème 3.2.1 :

$$\begin{aligned} p^N(x_t | y_{1:t}) - p(x_t | y_{1:t}) &= \frac{p^N(x_t | y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} \left( \mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})] - p_Y(y_{1:t}) \right) \\ &\quad + \frac{p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} \\ &\quad + \left( \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} \right) \end{aligned}$$

Comme d'après le lemme 3.4.2  $\epsilon_n = \delta h_N$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \epsilon_n^d}{N h_N^{tq+d}} \rightarrow b \in \mathbb{R}^+$  p.s., on a  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_N = 0$  p.s. et  $\lim_{n \rightarrow \infty} N h_N^{tq} = \infty$  p.s., en appliquant le Lemme A.1.1 (Bochner) on a que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})] = p_Y(y_{1:t}) \quad p.s. \quad (3.4)$$

En effet :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t}) | N]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[K_{h_N}(\bar{y}_{1:t}^1 - y_{1:t}) | N]] \end{aligned}$$

Comme  $\mathbb{E}[K_{h_N}(\bar{y}_{1:t}^1 - y_{1:t}) | N] \leq \sup_{y_{1:t}} p_Y(y_{1:t})$ , d'après le théorème de convergence dominée on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})] = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[K_{h_N}(\bar{y}_{1:t}^1 - y_{1:t}) | N]]$$

comme  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_N = 0$  p.s., on en déduit (3.4). Et (3.4) entraîne

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} - \frac{p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{p_Y(y_{1:t})} \right) = 0.$$

Le théorème A.1.1 entraîne que si  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_N = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} N h_N^{tq} = \infty$  alors

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t}) | N]^2 = 0$$

Il existe donc un  $M > 0$  et un  $N_M$  tel que pour tout  $N > N_M$

$$\mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t}) | N]^2 \leq M$$

D'après le théorème de convergence dominée on a

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})]^2 \\ = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t}) | N]^2] \end{aligned}$$

Comme  $n \rightarrow \infty$  entraîne  $h_N \rightarrow 0$  p.s. et  $N h_N^{tq} \rightarrow \infty$  p.s., on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t}) | N]^2 = 0 \quad p.s.$$

soit encore

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})]^2 = 0 \quad p.s.$$

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}\left[\frac{p_{XY}^N(x_t, y_{1:t}) - p_{XY}(x_t, y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]}\right]^2 = 0 \quad p.s.$$

Il ne reste plus qu'à étudier le comportement de

$$\mathbb{E}\left[\frac{p^N(x_t | y_{1:t})}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} (\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})] - p_Y^N(y_{1:t}))\right]^2$$

D'après la démonstration du théorème 3.2.1, il existe une suite positive  $A_N \rightarrow A \in \mathbb{R}_+$  telle que

$$N h_N^{tq+d} \mathbb{E}\left[\frac{p_{X|Y}^N}{\mathbb{E}[p_Y^N(y_{1:t})]} (\mathbb{E}[p_Y^N] - p_Y^N) | N\right]^2 \leq A_N$$

On peut donc encore utiliser le théorème de convergence dominée et le lemme 3.4.2 permet de conclure la démonstration.

**Théorème 3.4.5 (convergence ps)** *Les observations sont supposées générées suivant l'algorithme de sélection sur la boule  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- Les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt positifs et bornés
- La densité des observations  $p_Y$  est continue sur  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$  et positive en  $y_{1:t}$ .
- La densité conjointe  $p(x_t, y_{1:t})$  est continue au point  $(x_t, y_{1:t})$
- $K^2$  est un noyau symétrique à support compact
- $h_N$  est tel que  $K_{h_N}^2$  soit nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}}} = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) = p(x_t | y_{1:t}) \quad ps$$

**Démonstration :** Le résultat s'obtient de la même manière que la démonstration du théorème 3.4.4. On se ramène à

$$p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) = p_{X|Y}^N(x_t | y_{1:t})$$

Puis le lemme 3.4.2 et le théorème 3.2.2 permettent de conclure.

### Convergence uniforme

Comme pour le cas précédent on s'intéresse aux propriétés de l'estimation  $p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t}))$  définie par (3.3).

**Théorème 3.4.6 (convergence  $L_1$  ps)** *Si les noyaux  $K^1$  et  $K^2$  sont de Parzen-Rosenblatt, positifs et bornés, si  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{1:t}$  et si  $x_t \mapsto p(x_t, y_{1:t})$  est continue presque partout alors*

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \frac{n}{\epsilon_n^{tq}}} = \infty \end{array} \right\} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \int |p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) - p^n(x_t | y_{1:t})| dx_t = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Le résultat découle du théorème 3.4.5 et du théorème de Glick A.1.4.

**Théorème 3.4.7 (vitesse de convergence L1 intégrée)**

Les observations sont supposées générées suivant l'algorithme de sélection sur la boule  $\mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

- Les densités  $p_Y$  et  $p_{XY}$  appartiennent à  $W^{s,1}$
- Les noyaux  $\tilde{K}^1 \in L_1(\mathbb{R}^{tq+d})$  et  $K^2 \in L_1(\mathbb{R}^{tq})$  sont de classe  $s \geq 1$ .
- Pour certains  $\epsilon > 0$  on a pour  $(K, f, a) = \{(K^1, p_{XY}, tq + d), (K^2, p_Y, tq)\}$   
 $\int \|x\|^{a+\epsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{a+\epsilon}) f(x) dx < \infty$ .
- Le noyau  $K^2$  est symétrique à support compact,
- $h_N$  est tel que  $K_{h_N}^2$  soit nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$

Alors presque sûrement pour tout  $\epsilon_n > 0$ ,

$$\mathbb{E} \left[ \int |p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})| dx_t \right] = O(\epsilon_n^s) + O(1/\sqrt{n\epsilon_n^d})$$

L'espérance est calculée par rapport à toutes les variables simulées ainsi que par rapport à la trajectoire d'observations  $y_{1:t}$ .

**Démonstration :**

D'après les considérations faites dans la démonstration du théorème 3.4.4, si  $N$  désigne le nombre d'observations qu'il aurait fallu générer pour en obtenir  $n$  dont l'observation soit dans  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ , d'après la démonstration du théorème 3.2.4, on a

$$\mathbb{E}_{y_{1:t}} \left[ \int |p^n(x_t | \mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})) - p(x_t | y_{1:t})| dx_t \right] \leq \|p_{XY}^N - p_{XY}\|_{L1} + \|p_Y^N - p_Y\|_{L1}.$$

On en déduit

$$\mathbb{E} [\|p_{X|B_{\epsilon_n}^n Y}^n - p_{X|Y}\|_{L1}] \leq \mathbb{E} [\|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L1}] + \mathbb{E} [\|p_Y^n - p_Y\|_{L1}].$$

d'après le corollaire A.1.10.1

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L1}] &= O(h_n^s) + O(1/\sqrt{N h_n^{tq+d}}) + O(h_n^s) + O(1/\sqrt{N h_n^{tq}}) \\ &= O(h_n^s) + O(1/\sqrt{N h_n^{tq+d}}) \end{aligned}$$

le lemme 3.4.2 permet de conclure.

Ce filtre avec sélection est plus satisfaisant que le filtre à mémoire tronquée puisqu'il n'est pas nécessaire d'ajouter une hypothèse sur le modèle. De plus, la

qualité de l'estimation est liée à  $\epsilon$  dont le choix est à la charge de l'utilisateur et comme nous le montrerons dans la suite, le nombre  $n$  d'observations à générer n'est pas dépendant du temps.

Cependant, avant d'envisager son utilisation pour effectuer du filtrage en ligne, il est impératif d'étudier le choix de la valeur de  $\epsilon$  : plus  $\epsilon$  sera petit, plus l'estimation sera de qualité, mais, plus le temps requis pour réaliser les générations d'observations, et donc calculer l'estimation sera long.

Cette inconstance du temps de calcul du filtre avec sélection suivant les valeurs de  $\epsilon$  va à l'encontre du filtrage en ligne. Un filtre construit à l'aide d'une procédure de sélection moins brutale ne devrait pas connaître ces difficultés. Le dernier filtre que nous proposons, dans la partie suivante, s'appuie donc sur une procédure de sélection comparable à celle des filtres particuliers avec interaction.

### 3.5 Filtre par noyaux avec ré-échantillonnage

Nous envisageons une méthode de sélection des trajectoires moins violente que la précédente, inspirée des filtres particuliers avec interactions développés par Pierre Del Moral ([40][38]). Pour ces derniers, toutes les trajectoires n'ont pas les mêmes chances de continuer à évoluer. Il en est de même dans la méthode que nous proposons maintenant, à la différence près que la sélection s'effectue sans utiliser la vraisemblance des observations. En effet, dans notre cas, la sélection peut encore s'effectuer avec l'estimation par noyau de convolution de la densité de l'observation.

Cette approche semble a priori avoir les mêmes avantages que les filtres particuliers avec interactions : les trajectoires conservées restent dans la zone de l'espace intéressante au vu des observations  $y_{1:t}$ . Ainsi la qualité du filtre devrait se dégrader moins vite dans le temps.

Cependant, notre méthode, s'appuyant sur un échantillonnage suivant l'estimation de la densité, offre plusieurs avantages : la diversité des particules est conservée et aussi leur indépendance.

Décrivons à présent une procédure de filtrage par noyaux de convolution avec une étape de ré-échantillonnage à chaque pas de temps, avec  $p_0^n = p_0$  et  $t \geq 0$  :

Etape 1 : Génération de  $n$  états

$$\bar{x}_t^i \sim p_t^n \text{ pour } i = \dots, n$$

Etape 2 : Génération des  $n$  particules

Pour tout  $i = \dots, n$  on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$   
en appliquant le système (3.2) à  $\bar{x}_t^i$ .

Etape 3 : Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_{t+1} - \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

**Remarque :** dans ce filtre, le conditionnement par  $y_{1:t}$ , non explicite dans la construction de l'estimateur de la densité, est pris en compte au travers de la loi  $p_t^n$  qui sert à l'étape 1, à générer les particules.

Un grand nombre de variantes sont envisageables, notamment en ce qui concerne le ré-échantillonnage à l'étape 1. Plus précisément, selon la nature du système dynamique, il n'est pas forcément utile de ré-échantillonner à chaque instant. Pour répondre à cette question, dans le cadre des filtres particulaires, Liu([92],[96]) a introduit un critère de décision basé sur la variance des poids associés aux particules, une adaptation à cette approche est certainement envisageable.

Les théorèmes suivants garantissent la consistance du filtre avec ré-échantillonnage. Tout d'abord introduisons la variation totale entre le filtre optimal et son estimation obtenue par le filtre avec ré-échantillonnage à l'instant  $t$ . Soit

$$\Delta_{n,t} = \frac{1}{2} \|p_t^n(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t, |y_{1:t})\|_{L1} \quad (3.5)$$

**Théorème 3.5.1** Si  $K$  est un noyau de Parzen-Rosenblatt positif, si  $p(\cdot|y_{1:t-1})$  est continue et positive en  $y_t$  pour tout  $t$ , si  $h_{n,t+1}^q = o(\Delta_{n,t})$  alors

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_{n,t}^{d+q}}{\log n} = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,t} = 0 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_t^n(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t, |y_{1:t})\|_{L1} = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Montrons le théorème par récurrence sur  $t$ . Pour  $t = 1$  le résultat est vrai d'après le Théorème 3.2.3. Supposons qu'il soit vrai jusqu'à l'instant  $t$ , montrons le pour  $t + 1$ .

D'après l'hypothèse de récurrence on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta_n = 0 \quad ps$$

Soit  $\bar{p}_t^n$ , la densité construite à l'aide de l'échantillon  $\bar{x}_t^1, \dots, \bar{x}_t^n$  tiré suivant  $p_t^n$ . Nous allons montrer qu'il existe un sous-échantillon  $\bar{x}_t^{i_1}, \dots, \bar{x}_t^{i_M}$  qui complété par un nouvel échantillon  $\dot{x}_t^{i_1}, \dots, \dot{x}_t^{i_N}$ , constitue un échantillon de  $p_t$ . La technique employée s'inspire d'une démonstration de Devroye([47] p46-49) assurant la robustesse des estimateurs à noyaux.

Considérons les trois fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} f_n &= \frac{\min(p_t^n, p_t)}{1 - \Delta_n} \\ g_n &= \frac{p_t^n - \min(p_t^n, p_t)}{\Delta_n} \\ k_n &= \frac{p_t - \min(p_t^n, p_t)}{\Delta_n} \end{aligned}$$

alors on a

$$\begin{aligned} p_t^n &= \Delta_n \cdot g_n + (1 - \Delta_n) \cdot f_n \\ p_t &= \Delta_n \cdot k_n + (1 - \Delta_n) \cdot f_n \end{aligned}$$

Ainsi chaque  $\bar{x}_t^i$  généré suivant  $p_t^n$  est une réalisation de  $g_n$  avec une probabilité  $\Delta_n$ . Soient les variables aléatoires  $Z_i$  qui valent 1 si  $\bar{x}_t^i \sim g_n$  et 0 si  $\bar{x}_t^i \sim f_n$ . Les  $Z_i$  suivent donc une loi de Bernoulli  $Z_i \sim \mathcal{B}(\Delta_n)$  et  $N_n = \sum Z_i$  suit une binomiale  $N_n \sim \mathcal{B}(n, \Delta_n)$ .

Soit  $M_n = n - N_n$  le nombre de  $\bar{x}_t^i$  générés suivant  $p_t^n$  qui sont des réalisations de  $f_n$ . Notons  $\bar{x}_t^{i_1}, \dots, \bar{x}_t^{i_M}$  ce sous échantillon,  $1 \leq i_1 < \dots < i_M \leq n$ . Soient  $I_M = \{i_1, \dots, i_M\}$  et  $I_N = \{1, \dots, n\} - I_M$ . Considérons à présent l'échantillon défini par

$$\tilde{x}_t^i = \begin{cases} \bar{x}_t^i & \text{si } i \in I_M \\ \dot{x}_t^i & \text{avec } \dot{x}_t^i \sim k_n, \text{ si } i \in I_N \end{cases} \quad \text{pour } i = 1, \dots, n$$

Donc  $\tilde{x}_t^1, \dots, \tilde{x}_t^n$  est un échantillon de loi  $p_t$  qui a  $M_n$  éléments communs avec  $\bar{x}_t^1, \dots, \bar{x}_t^n$ , l'échantillon de loi  $p_t^n$ .

En appliquant le système dynamique aux  $\bar{x}_t^1, \dots, \bar{x}_t^n$  et aux  $\tilde{x}_t^i$ , pour  $i \in I_N$ , on

obtient  $(x_{t+1}^1, y_{t+1}^1), \dots, (x_{t+1}^n, y_{t+1}^n)$  et  $(\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$ , pour  $i \in I_N$ . Ainsi on peut encore construire deux échantillons  $(x_{t+1}^1, y_{t+1}^1), \dots, (x_{t+1}^n, y_{t+1}^n)$  et  $(\tilde{x}_{t+1}^1, \tilde{y}_{t+1}^1), \dots, (\tilde{x}_{t+1}^n, \tilde{y}_{t+1}^n)$  avec  $M_n$  couples en commun.

Le premier sert à construire l'estimateur du filtre optimal fourni par le filtre avec ré-échantillonnage :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}$$

Le second, sert à construire l'estimateur à noyau classique du filtre optimal :

$$\tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

L'expression ci-dessus, donne une estimation de la densité de  $x_{t+1}$  conditionnellement aux  $y_{1:t+1}$ , la seule présence, de la dernière observation,  $y_{t+1}$ , dans l'expression découle du fait que tous les couples  $(x_{t+1}^i, y_{t+1}^i)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont générées à partir de  $p(x_t|y_{1:t})$ . Les anciennes observations  $y_{1:t}$  interviennent donc de manière implicite.

Cet estimateur du filtre optimal sert à décomposer la distance  $L_1$  entre le filtre optimal et son estimation par le filtre avec ré-échantillonnage :

$$\|p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - p_{t+1}(x_{t+1}|y_{1:t+1})\|_{L_1} \leq \|p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - \tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1})\|_{L_1} + \|\tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - p_{t+1}(x_{t+1}|y_{1:t+1})\|_{L_1}$$

Le Théorème 3.2.3, assure que

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_{n,t}^{d+q}}{\log n} = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_{n,t} = 0 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|\tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - p_{t+1}(x_{t+1}|y_{1:t+1})\|_{L_1} = 0 \quad ps$$

il reste donc uniquement à étudier le cas de

$$\|p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - \tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1})\|_{L_1} = \int |p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - \tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1})| dx_{t+1}$$

Soit

$$D_n(x_{t+1}) = p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) - \tilde{p}_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1})$$

alors, par définition :

$$\begin{aligned}
D_n(x_{t+1}) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&\quad + \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&\quad - \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}
\end{aligned}$$

il suit

$$\begin{aligned}
|D_n(x_{t+1})| &\leq \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) \\
&\quad \times \left| \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)} - \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \right| \\
&\quad + \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \left| \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \right|
\end{aligned}$$

Du fait que  $(\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i) = (x_{t+1}^i, y_{t+1}^i)$  pour  $i \in I_M$ , il découle

$$\begin{aligned}
|D_n(x_{t+1})| &\leq \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)} \\
&\times \left| \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) - \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \right| \\
&+ \frac{1}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \left| \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(x_{t+1} - x_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) \right. \\
&\left. - \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(x_{t+1} - \tilde{x}_{t+1}^i) K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \right|
\end{aligned}$$

Comme le noyau est une densité, on en déduit

$$\begin{aligned}
\int |D_n(x_{t+1})| dx_{t+1} &\leq \frac{\left| \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) - \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \right|}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&+ \frac{\sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) + \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\begin{aligned}
\int |D_n(x_{t+1})| dx_{t+1} &\leq 2 \frac{\sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) + \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&\leq \frac{2N_n \frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) + \frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{n \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\
&\leq 2 \frac{N_n}{nh_n^q} \frac{2 \max K}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}
\end{aligned}$$

Le Théorème 3.2.2, assure que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \rightarrow p(y_{t+1}|y_{1:t}) \quad ps$$

et par hypothèse  $p(y_{t+1}|y_{1:t}) > 0$ .

Donc pour assurer la convergence de  $\|D_n\|_{L_1}$  il suffit de montrer que  $N_n/(nh_{n,t+1}^q)$  tend vers zéro presque sûrement. Or,  $N_n/n$  est l'estimation fréquentiste de la proportion  $\Delta_{n,t}$ . Comme  $\Delta_n/h_{n,t+1}^q \rightarrow 0$  ps, pour que  $N_n/(nh_{n,t+1}^q)$  tende aussi vers zéro presque sûrement, il suffit de s'assurer que la convergence de l'estimateur empirique,  $p_n$ , d'une proportion proportion,  $p$ , est uniforme en  $p$ . Comme le lemme 3.4.3 assure ce résultat, on en déduit donc

$$\left| \frac{N_n}{n} - \Delta_n \right| \rightarrow 0 \quad ps$$

comme  $\Delta_n \rightarrow 0$  ps on a encore

$$\frac{N_n}{n} \rightarrow 0 \quad ps$$

ce qui achève la démonstration du Théorème.

Le théorème 3.5.1 garantit la consistance du filtre avec ré-échantillonnage. Cependant, il n'est pas aisé de déterminer une suite  $h_{n,t}$  vérifiant les conditions du théorème. En ajoutant, une contrainte de bornitude sur la vraisemblance des observations du modèle, il est possible d'établir ce résultat pour une largeur de fenêtre  $h_n$  homogène au cours du temps. ce résultat est établi par le théorème suivant :

**Théorème 3.5.2** *Si  $K$  est un noyau de Parzen-Rosenblatt positif, si  $p(\cdot|y_{1:t-1})$  est continue et positive en  $y_t$  pour tout  $t$ , s'il existe  $M > 0$  tel que  $p(y_t|x_t) \leq M$  pour tout  $t$ , s'il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $nh_n^{2q} = O(n^\alpha)$  alors*

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{d+q}}{\log n} = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|p_t^n(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t, |y_{1:t})\|_{L_1} = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Le début de la démonstration est identique au début de la démonstration du théorème 3.5.1, jusqu'à l'inégalité :

$$\begin{aligned} \int |D_n(x_{t+1})| dx_{t+1} &\leq 2 \frac{\sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i) + \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\ &\leq \frac{2N_n}{n} \frac{\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) + \frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(y_{t+1} - y_{t+1}^i)}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\ &\leq \frac{2N_n h_{N_n}^q}{nh_n^q} \frac{\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_{N_n}})}{h_{N_n}^q} + \frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K(\frac{y_{t+1} - y_{t+1}^i}{h_{N_n}})}{h_{N_n}^q}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \end{aligned}$$

Le Théorème 3.2.2, assure que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i) \rightarrow p(y_{t+1}|y_{1:t}) \quad ps$$

et par hypothèse  $p(y_{t+1}|y_{1:t}) > 0$ .

Montrons à présent que  $\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n})}{h_{N_n}^q}$  et  $\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K(\frac{y_{t+1} - y_{t+1}^i}{h_n})}{h_{N_n}^q}$  sont presque sûrement bornées asymptotiquement. Considérons tout d'abord le premier terme et par alléger les notations soit

$$X_i = \frac{K(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n})}{h_{N_n}^q}$$

pour tout  $i \in I_N$ . Soient  $M_n = \mathbb{E}[X_i|\mathcal{F}_t]$  et  $Z_i = X_i - M_n$  avec  $\mathcal{F}_t$  l'ensemble les variables simulées jusqu'à l'instant  $t$ . Les variable  $Z_1, \dots, Z_n$  sont identiquement distribuées et indépendantes conditionnellement à  $\mathcal{F}_t$ .

On a

$$\mathbb{E}[(\sum_{i=1}^{N_n} Z_i)^4] = N_n \mathbb{E}[Z_1^4] + \frac{N_n(N_n - 1)}{2} \mathbb{E}[Z_1^2]^2$$

car  $\mathbb{E}[Z_i Z_j Z_k Z_l] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_i|\mathcal{F}_t] \mathbb{E}[Z_j Z_k Z_l|\mathcal{F}_t]] = 0$  pour tout triplet  $(j, k, l)$  de  $\{1, \dots, n\} - i$ . On en déduit, d'après l'inégalité de Markov-Tchebychev

$$\begin{aligned} P(|\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} Z_i| > \varepsilon) &\leq \frac{|\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} Z_i|^4}{\varepsilon^4} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[Z_1^4]}{N_n^3 \varepsilon^4} + \frac{\mathbb{E}[Z_1^2]^2}{2N_n^2 \varepsilon^4} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Etudions à présent les termes  $\mathbb{E}[Z_1^2]$  et  $\mathbb{E}[Z_1^4]$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z_1^2] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_1^2|\mathcal{F}_t]] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1^2|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}[X_1|\mathcal{F}_t]^2] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_1^2|\mathcal{F}_t]] \end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1^2 | \mathcal{F}_t] &= \int \frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)^2}{h_{N_n}^{2q}} \tilde{p}(\tilde{y}_{t+1} | y_{1:t}) d\tilde{y}_{t+1} \\
&= \int \frac{h_n K(u)^2}{h_{N_n}^{2q}} \tilde{p}(y_{t+1} - hu | y_{1:t}) du \\
&\leq \int \frac{K(u)^2}{h_{N_n}^q} M du \\
&\leq \frac{M_1}{h_{N_n}^q}
\end{aligned}$$

avec  $M_1 = M \int K^2$ .  $M$  est la borne supérieure de la vraisemblance d'une observation connaissant l'état,  $M$  existe par hypothèse. On a bien  $\tilde{p}(\tilde{y}_{t+1} | y_{1:t}) \leq M$  car bien que cette densité des  $\tilde{y}_{t+1}$  découle d'une loi jointe  $\tilde{p}(\tilde{x}_{t+1}, \tilde{y}_{t+1} | y_{1:t})$  le lien entre  $\tilde{x}_{t+1}$  et  $\tilde{y}_{t+1}$  est conforme au modèle. En effet,  $\tilde{y}_{t+1}$  s'obtient en appliquant l'équation d'observation du système à  $\tilde{x}_{t+1}$ . Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\tilde{p}(\tilde{y}_{t+1} | y_{1:t}) &= \int \tilde{p}(\tilde{x}_{t+1}, \tilde{y}_{t+1} | y_{1:t}) d\tilde{x}_{t+1} \\
&= \int p(\tilde{y}_{t+1} | \tilde{x}_{t+1}) \tilde{p}(\tilde{x}_{t+1} | y_{1:t}) d\tilde{x}_{t+1} \\
&\leq \int M \tilde{p}(\tilde{x}_{t+1} | y_{1:t}) d\tilde{x}_{t+1} \\
&\leq M
\end{aligned}$$

On obtient finalement

$$\mathbb{E}[Z_1^2] \leq \frac{M_1}{h_{N_n}^q}. \quad (3.7)$$

A présent étudions le cas de  $\mathbb{E}[Z_1^4]$  :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_1^4] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_1^4 | \mathcal{F}_t]] \\
&= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[X_1^4 | \mathcal{F}_t] - 4\mathbb{E}[X_i^3 | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_t] - 4\mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_t]^3 \right. \\
&\quad \left. + 6\mathbb{E}[X_i^2 | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_t]^2 + \mathbb{E}[X_1 | \mathcal{F}_t]^4 \right] \\
&\leq \mathbb{E} \left[ \mathbb{E}[X_1^4 | \mathcal{F}_t] + 6\mathbb{E}[X_i^2 | \mathcal{F}_t] \mathbb{E}[X_i | \mathcal{F}_t]^2 \right]
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}[X_1^2 | \mathcal{F}_t] \leq \frac{M_1}{h_{N_n}^q}$$

$$\mathbb{E}[X_1 | \mathcal{F}_t] \leq \frac{Mh_n^q}{h_{N_n}^q}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_1^4 | \mathcal{F}_t] &= \int \frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)^4}{h_{N_n}^{4q}} \tilde{p}(\tilde{y}_{t+1} | y_{1:t}) d\tilde{y}_{t+1} \\ &= \int \frac{h_n^q K(u)^4}{h_{N_n}^{4q}} \tilde{p}(y_{t+1} - hu | y_{1:t}) du \\ &\leq \int \frac{K(u)^4}{h_{N_n}^{3q}} M du \\ &\leq \frac{M_2}{h_{N_n}^{3q}} \end{aligned}$$

avec  $M_2 = M \int K^4$ . On obtient

$$\mathbb{E}[Z_1^4] \leq \frac{M_2}{h_{N_n}^{3q}} + 6 \frac{M_1}{h_{N_n}^q} \frac{M^2 h_n^{2q}}{h_{N_n}^{2q}} \quad (3.8)$$

En appliquant (3.7) et (3.8) à (3.6), on déduit finalement

$$P\left(\left|\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} Z_i\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{M_2}{N_n^3 h_{N_n}^{3q} \varepsilon^4} + \frac{6M_1 M^2}{N_n^3 h_{N_n}^q \varepsilon^4} + \frac{M_1^2}{2N_n^2 h_{N_n}^{2q} \varepsilon^4}$$

Comme par hypothèse, il existe  $\alpha > 0$  tel que  $Nh_n^{2q} = O(N^\alpha)$  la série de terme général  $\frac{M_2}{N_n^3 h_{N_n}^{3q} \varepsilon^4} + \frac{6M_1 M^2}{N_n^3 h_{N_n}^q \varepsilon^4} + \frac{M_1^2}{2N_n^2 h_{N_n}^{2q} \varepsilon^4}$  est convergente. D'après le lemme de Borel Cantelli, on en déduit que  $\frac{1}{N_n} \sum_{i=1}^{N_n} Z_i$  converge presque sûrement vers zéro lorsque  $N_n$  tend vers l'infini. Soit encore

$$\lim_{N_n \rightarrow \infty} \frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)}{h_{N_n}^q} - \mathbb{E}\left[\frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)}{h_{N_n}^q} | \mathcal{F}_t\right] = 0 \quad ps$$

comme

$$0 \leq \mathbb{E}\left[\frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)}{h_{N_n}^q} | \mathcal{F}_t\right] \leq \frac{Mh_n^q}{h_{N_n}^q}$$

où  $h_n \leq h_{N_n}^q$ . Donc  $\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K\left(\frac{y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i}{h_n}\right)}{h_{N_n}^q}$  est presque sûrement asymptotiquement borné.

En appliquant le même raisonnement à  $\frac{1}{N_n} \sum_{i \in I_N} \frac{K(\frac{y_{t+1} - y_{t+1}^i}{h_n})}{h_{N_n}^q}$  on aboutit exactement à la même conclusion.

Ainsi pour  $N_n$  grand on a

$$\begin{aligned} \int |D_n(x_{t+1})| dx_{t+1} &\leq \frac{2N_n h_{N_n}^q}{n h_n^q} \frac{\frac{M h_n^q}{h_{N_n}^q} + \frac{M h_n^q}{h_{N_n}^q}}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \\ &\leq \frac{4N_n}{n} \frac{M}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1} - \tilde{y}_{t+1}^i)} \end{aligned}$$

Soit finalement pour  $n$  et  $N_n$  grands

$$\int |D_n(x_{t+1})| dx_{t+1} = O\left(\frac{N_n}{n}\right) \quad ps$$

Comme on l'a montré lors de la démonstration du théorème 3.5.1, on a que  $\frac{N_n}{n} \rightarrow 0$  presque sûrement. Ce qui termine la démonstration du théorème 3.5.2.

Comme pour les autres filtres, il est possible de préciser la vitesse de convergence. C'est l'objet du théorème suivant.

### **Théorème 3.5.3 (vitesse de convergence L1 intégrée)**

*Si pour tout  $t$  les densités  $p(y_t|y_{1:t-1}) = p_Y$  et  $p(x_t, y_t|y_{1:t-1}) = p_{XY}$  appartiennent à  $W^{s,1}$  et les noyaux  $\tilde{K}^1 \in L_1(\mathbb{R}^{q+d})$  et  $K^2 \in L_1(\mathbb{R}^q)$  sont de classe  $s \geq 1$ . Si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a pour  $(K, f, a) = \{(\tilde{K}^1, p_{XY}, q+d), (K^2, p_Y, q)\}$ ,  $\int \|x\|^{a+\varepsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{a+\varepsilon}) f(x) dx < \infty$  alors pour tout  $h_n > 0$  on a*

$$\mathbb{E} \left[ \int |p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| dx_t \right] = u_t [O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{q+d}})]$$

avec  $u_t = 2^t - 1$ .

L'espérance est calculée par rapport à toutes les variables simulées et à la trajectoire d'observations  $y_{1:t}$ .

**Démonstration :** Tout d'abord, effectuons une décomposition comparable à celle de la démonstration du théorème 3.2.4 :

$$\begin{aligned}
p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t}) &= \frac{p_{XY}^n(x_t, y_t|y_{1:t-1})}{p_Y^n(y_t|y_{1:t-1})} - \frac{p_{XY}(x_t, y_t|y_{1:t-1})}{p^Y(y_t|y_{1:t-1})} \\
&= \frac{p_{XY}^n}{p_Y^n} - \frac{p_{XY}}{p^Y} \\
&= \frac{p_{XY}^n p^Y - p_{XY} p_Y^n}{p_Y^n p^Y} \\
&= \frac{p_{XY}^n p^Y - p_{XY}^n p_Y^n + p_{XY}^n p_Y^n - p_{XY} p_Y^n}{p_Y^n p^Y} \\
&= \frac{p_{XY}^n (p^Y - p_Y^n) + p_Y^n (p_{XY}^n - p_{XY})}{p_Y^n p^Y} \\
&= \frac{1}{p^Y} \left[ p_{XY}^n - p_{XY} + (p^Y - p_Y^n) p_{X|Y}^n \right]
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
|p^n(x_t|y_{1:t}) - p(x_t|y_{1:t})| &\leq \frac{|p_{XY}^n(x_t, y_t|y_{1:t-1}) - p_{XY}(x_t, y_t|y_{1:t-1})|}{p^Y(y_t|y_{1:t-1})} \\
&\quad + \frac{|p^Y(y_t|y_{1:t-1}) - p_Y^n(y_t|y_{1:t-1})| p_{X|Y}^n(x_t|y_{1:t})}{p^Y(y_t|y_{1:t-1})}
\end{aligned}$$

Finalement on obtient

$$\mathbb{E}_{y_t|y_{1:t-1}} [\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L_1}] \leq \|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1} + \|p_Y^n - p^Y\|_{L_1}$$

On en déduit

$$\mathbb{E}[\|p_{X|Y}^n - p_{X|Y}\|_{L_1}] \leq \mathbb{E}[\|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1}] + \mathbb{E}[\|p_Y^n - p^Y\|_{L_1}].$$

Considérons à présent l'estimation  $\tilde{p}^n(x_t|y_{1:t})$  introduite lors de la démonstration du théorème 3.5.2, dont les variables de bases  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_t^i)$  sont générées exactement suivant  $p_{XY}(x_t, y_t|y_{1:t-1})$ . Alors on a les décompositions suivantes :

$$\mathbb{E}[\|p_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1}] \leq \mathbb{E}[\|p_{XY}^n - \tilde{p}_{XY}^n\|_{L_1}] + \mathbb{E}[\|\tilde{p}_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1}]$$

et

$$\mathbb{E}[\|p_Y^n - p^Y\|_{L_1}] \leq \mathbb{E}[\|p_Y^n - \tilde{p}_Y^n\|_{L_1}] + \mathbb{E}[\|\tilde{p}_Y^n - p^Y\|_{L_1}]$$

D'après le corollaire A.1.10.1

$$\mathbb{E}[\|\tilde{p}_{XY}^n - p_{XY}\|_{L_1}] = O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{q+d}})$$

et

$$\mathbb{E}[\|\tilde{p}_Y^n - p_Y\|_{L_1}] = O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^q})$$

A présent, étudions  $\mathbb{E}[\|p_{XY}^n - \tilde{p}_{XY}^n\|_{L_1}]$ . Considérons à nouveau, la quantité  $\Delta_n$  (3.5) introduite précédemment :

$$\Delta_n = \frac{1}{2} \|p_{t-1}^n(x_{t-1}|y_{1:t-1}) - p_{t-1}(x_{t-1}, |y_{1:t-1})\|_{L_1}$$

Rappelons que  $p_{XY}^n$  et  $\tilde{p}_{XY}^n$  ont  $N_n$  couples différents avec  $N_n \sim \mathcal{B}(n, \Delta_n)$ . Ainsi on a

$$\begin{aligned} \|p_{XY}^n - \tilde{p}_{XY}^n\|_{L_1} &= \frac{1}{n} \int \left| \sum_{i \in I_N} K_{h_n}(x_t - x_t^i) K_{h_n}(y_t - y_t^i) \right. \\ &\quad \left. - K_{h_n}(x_t - \tilde{x}_t^i) K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^i) \right| dx_t dy_t \\ &\leq \frac{2N_n}{n} \end{aligned}$$

or  $\mathbb{E}[\frac{N_n}{n} | \Delta_n] = \Delta_n$  donc on en déduit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|p_t^n(x_t, y_t | y_{1:t-1}) - \tilde{p}_t^n(x_t, y_t | y_{1:t-1})\|_{L_1}] \\ \leq \mathbb{E}[\|p_{t-1}^n(x_{t-1} | y_{1:t-1}) - p_{t-1}(x_{t-1}, |y_{1:t-1})\|_{L_1}] \end{aligned}$$

Par le même raisonnement, on obtient

$$\mathbb{E}[\|p_t^n(y_t | y_{1:t-1}) - \tilde{p}_t^n(y_t | y_{1:t-1})\|_{L_1}] \leq \mathbb{E}[\|p_{t-1}^n(x_{t-1} | y_{1:t-1}) - p_{t-1}(x_{t-1}, |y_{1:t-1})\|_{L_1}].$$

Il en découle

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\|p^n(x_t | y_{1:t}) - p(x_t | y_{1:t})\|_{L_1}] &\leq 2\mathbb{E}[\|p_{t-1}^n(x_{t-1} | y_{1:t-1}) - p_{t-1}(x_{t-1}, |y_{1:t-1})\|_{L_1}] \\ &\quad + O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{q+d}}) \end{aligned}$$

Comme pour  $t = 1$ , d'après le corollaire A.1.10.1, on a

$$\mathbb{E}[\|p^n(x_1 | y_1) - p(x_1 | y_1)\|_{L_1}] \leq O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{q+d}})$$

On en déduit le résultat.

Cette démonstration termine la partie de ce chapitre consacrée à la présentation de nos filtres par convolution. Avant de conclure le chapitre, il est important de discuter du fait que les observations considérées pour construire nos filtres sont souvent de grandes dimensions ce qui pose généralement des problèmes aux estimateurs de densité par noyaux de convolution.

## 3.6 Le fléau des grandes dimensions

Tous les filtres proposés dans ce chapitre sont construits à partir de noyaux de convolution. Or, les estimateurs de densité à noyau rencontrent des difficultés lorsque les données sont de grandes dimensions. Ce problème, aussi appelé fléau de la dimension, est lié à la dispersion des données dans un espace à grande dimension. Sur le plan théorique cela se traduit par les conditions  $nh_n^d \rightarrow \infty$  et  $h_n \rightarrow \infty$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ , avec la dimension des données.

Nos filtres devraient a priori être victimes de ce problème. Sur le plan théorique c'est le cas, puisque la dimension des données, dépendante du temps dans le cas des systèmes dynamiques, intervient dans les résultats. Mais, comme le montre Del Moral([28]), la dimension intervient aussi dans la convergence des processus empiriques. Ce problème n'est pas liée à l'utilisation de noyaux de convolution pour construire nos filtres.

Cependant, comme on pourra le voir au travers des applications des derniers chapitres, nos filtres ne sont pas victimes du fléau des grandes dimensions. La première raison que l'on peut évoquer pour expliquer le bon comportement de nos filtres est que le nombre d'observations utilisées pour les construire n'est pas limité. Ainsi, même pour de grandes dimensions, en générant un très grand nombre d'observations, on peut pallier le problème de la rareté des données.

Cependant, ce raisonnement ne tient pas pour le filtre par convolution à mémoire complète. En effet, la condition  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{tq+d} = \infty$  fait que, quel que soit le nombre  $n$  de particules prises au départ, il sera forcément insuffisant à partir d'un certain instant  $t$ . Mais encore une fois, en pratique, la qualité du filtre ne se dégrade pas comme on aurait pu le craindre.

Aucune justification théorique rigoureuse de cette propriété intéressante n'est donnée dans ce mémoire. Nous proposons uniquement une explication empirique à cette délicate question. L'hypothèse que l'on peut avancer est que le cadre du filtrage est différent du contexte usuel de l'estimation de densité. Les particules utilisées pour construire les filtres sont toutes générées suivant le même système dynamique, donc pour de nombreux modèles elles ne vont pas trop se disperser. En effet, bien que la dimension des observations augmente rapidement, le volume de la zone de l'espace les contenant augmente beaucoup moins vite. Par conséquent, il n'y a pas de problème de rareté des données et la qualité des estimations reste correcte au coeur de cette zone.

Mais, si le modèle considéré accroît systématiquement les distances entre parti-

cules, c'est à dire s'il n'est pas stable, l'augmentation de la dispersion des particules va inévitablement entraîner, à court terme, leur rareté dans l'espace et causer ainsi la divergence du filtre. Les filtres modifiés, comme le filtre à mémoire tronqué ou avec écrasement du passé atténuent ce problème sans complètement le régler.

Seuls, le filtre avec sélection et le filtre avec ré-échantillonnage contournent définitivement le problème du fléau de la dimension. Le filtre avec sélection cantonne les observations dans une boule, ainsi le volume de la zone de l'espace contenant les particules associées reste stable dans le temps. Pour le filtre avec ré-échantillonnage, l'étape de ré-échantillonnage a pour effet immédiat de réduire le volume de la zone contenant les particules, évitant du coup la dispersion des particules dans le temps.

### 3.7 Conclusion du troisième chapitre

Les filtres par convolution présentés dans ce chapitre possèdent tous des propriétés de convergence théorique vers le filtre optimal. Cependant, les conditions garantissant la convergence ne sont pas toutes équivalentes. Comme on l'a évoqué dans la section précédente, le filtre à mémoire complète se dégrade inévitablement au fil du temps s'il est construit avec un nombre constant de particules. La variante avec écrasement du passé ralentit, en pratique cette dégénérescence mais comme les conditions théoriques assurant la convergence sont les mêmes la dégradation du filtre est encore inévitable en temps long. A cause, de ces difficultés, on ne peut que déconseiller l'utilisation pratique du filtre à mémoire complète et de sa variante à mémoire écrasée.

Les hypothèses de convergence de l'autre variante, le filtre à mémoire tronquée, permettent d'obtenir un filtrage de qualité correcte au fil du temps, avec un nombre constant de particules. Mais ceci est vrai à condition que, pour le système dynamique considéré, seules les observations récentes apportent de l'information sur l'état.

En admettant cette forte hypothèse, plusieurs problèmes se posent alors : comment varie au cours du temps la profondeur de la mémoire nécessaire au filtrage ? Existe-il une profondeur optimale ? Si oui, comment la trouver ?

Avant d'envisager l'utilisation pratique du filtre à mémoire tronquée, il serait nécessaire d'approfondir ces questions. Nous n'avons pas effectué cette étude car les autres filtres que nous avons développés ne sont pas soumis à ces difficultés.

Les hypothèses assurant la convergence du filtre avec sélection garantissent la stabilité de la qualité du filtrage au fil du temps, avec un nombre constant de particules. Cependant, en pratique, le filtre avec sélection pose quelques difficultés. L'étape de sélection de l'algorithme peut parfois être très exigeante, c'est-à-dire avoir un taux de rejet très élevé, et ainsi prendre beaucoup de temps. Une utilisation en ligne de ce filtre, tel qu'il est présenté, n'est donc pas recommandée, mais il reste très intéressant pour une utilisation hors ligne.

Pour l'employer en ligne, il faudrait étudier la propagation de la boule de sélection au travers du système dynamique afin d'en définir le rayon adapté à chaque instant. Mais l'introduction d'une telle étape dans l'algorithme fait sortir le filtre du cadre de la démonstration que nous avons établi.

Le filtre par convolution avec ré-échantillonnage est globalement le plus intéressant de tous les filtres que nous avons proposés dans ce chapitre. Théoriquement, il se dégrade moins vite dans le temps que le filtre à mémoire complète. Bien qu'il nécessite plus de particules que le filtre avec sélection, pour atteindre la même qualité d'approximation, le temps de calcul requis est constant à chaque instant  $t$ . Il est donc aussi bien adapté pour le filtrage en ligne, que hors ligne. Finalement il est doté des mêmes atouts que le filtre de Monte-Carlo avec interaction. Mais de plus, il a l'avantage de se passer de la connaissance analytique de la vraisemblance des particules, avantage fort appréciable, car il permet de traiter plus rigoureusement les systèmes dynamiques issus de modèles réels. De plus, grâce au ré-échantillonnage à partir d'une densité (estimée), il maintient la diversité et l'indépendance des particules.



# Chapitre 4

## Estimation de l'état d'un système dynamique

Le filtre par noyau de convolution développé dans le chapitre précédent met à notre disposition une estimation de la densité de  $p(x_t|y_1, \dots, y_t)$ . A partir de cette estimation, il est possible d'approximer l'état du système à l'aide de différentes quantités. Nous développons deux procédures au cours des différentes parties de ce chapitre. Elles sont basées sur des estimateurs classiques en statistique : l'espérance conditionnelle, et le mode conditionnel.

Nous avons choisi de ne pas considérer le cas de la médiane conditionnelle pour les raisons évoquées dans le paragraphe suivant.

Les estimations de médianes sont connues pour offrir une plus grande robustesse que les estimations de moyennes. Il est très pertinent d'utiliser une estimation de médiane dans des contextes où il est probable d'observer des données aberrantes. Dans notre cadre de travail, les particules sont simulées à l'aide du système dynamique modélisant le problème. Il est donc peu probable d'obtenir des données aberrantes. En pratique, la médiane et la moyenne sont donc très proches. En conséquence, nous ne réalisons aucune étude des propriétés théoriques de la médiane conditionnelle ou de son estimation.

Toutefois, afin d'illustrer nos propos, quelques exemples de filtrage avec la médiane sont présentés dans le chapitre des applications. Rappelons que le calcul de la médiane empirique d'un échantillon dont les données sont de dimension supérieure à un est problématique car il n'y a pas unicité de la définition de la médiane spatiale. On est ainsi confronté au problème du choix de la médiane.

Les premières définitions, pour les espaces euclidiens, ont été introduites par Mi-

lasevic & Ducharme([100]), puis une généralisation, aux espaces de Banach, a été faite par Kemperman([85]). De nombreux autres travaux ont suivi. Un éventail des médianes et quantiles multi-dimensionnels existants sont présentés par Chaudhuri ([20],[18]).

Pour les applications, nous avons utilisée la définition de la médiane la plus simple à calculer, la  $L_1$ —Médiane. En pratique, il suffit de calculer indépendamment la médiane pour chacune des dimensions des observations.

## 4.1 Espérance conditionnelle

A partir du contexte du filtre par noyau de convolution, il est aisé de construire un estimateur de l'espérance. Il est aussi possible de construire cet estimateur de manière totalement indépendante, c'est-à-dire sans faire intervenir l'estimation de la densité du filtre optimal. En effet, l'estimation de l'espérance conditionnelle peut se formaliser comme un problème de régression classique. Nous proposons de traiter aussi ce problème de régression avec les mêmes outils d'estimation non paramétrique : les estimateurs à noyau de convolution. Nous exposons tout d'abord les résultats classiques de régression par estimateurs à noyau puis nous les adaptions au contexte du filtrage.

### 4.1.1 Régression par la méthode des noyaux

Le cas de la régression non linéaire se formalise de la même manière que l'estimation de densité : soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de loi  $\mu$ . Cette fois, l'objectif est de trouver une application mesurable  $r$  telle que  $r(Y)$  soit le plus proche de  $X$  au sens des moindres carrés. La solution de ce problème est  $\mathbb{E}[X|Y]$  lorsque cette quantité existe. Pour assurer l'existence de  $r$ , il est nécessaire de supposer que  $\mathbb{E}|X| < \infty$ .  $r$  est une version déterminée de la fonction  $y \mapsto \mathbb{E}[X|y]$ . La question de son unicité est ici éludée.

Pour estimer  $r$  par la méthode des noyaux, il faut supposer que la loi  $\nu$  de  $Y$  admet une densité  $g$ . Alors en tout point où  $g$  est non nulle

$$r(y) = \frac{\phi(y)}{g(y)} \text{ avec } \phi(y) = \int x d\mu(x, y)$$

Il est alors possible de construire les estimateurs de  $f$  et  $\phi$  associés au noyau  $K$  :

$$\begin{aligned} g_n(y) &= (K_{h_n} * \nu_n)(y) \\ \phi_n(y) &= \int x K_{h_n}(y - t) d\mu_n(x, t) \end{aligned}$$

avec

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(X_i, Y_i)} \text{ et } \nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{Y_i}$$

Les mesures empiriques  $\nu_n$  et  $\mu_n$  sont les estimations naturelles des mesures  $\nu$  et  $\mu$ , associées aux observations  $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ .

Nous obtenons alors l'estimateur de  $r$ ,  $r_n(y) = \phi_n(y)/g_n(y)$ , soit, sous forme plus explicite

$$r_n(y) = \frac{\sum_{i=1}^n X_i K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{y-Y_i}{h_n}\right)}.$$

Dans la littérature,  $r_n$  est souvent rencontré sous le nom d'estimateur de Nadaraya-Watson. Les propriétés des estimateurs à noyau pour la régression, dans le contexte statistique classique où des couples  $(X_i, Y_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  sont donnés, ont été abondamment étudiées. En effet, selon les hypothèses imposées au noyau  $K$ , la convergence en probabilité, presque complète ou en norme  $L^p$  vers  $r$  ont été démontrées (cf. Bosq [14], Sarda & Vieu[118] ou Györfi & al.[69]). Ferraty & Vieu[62] propose une étude complète et pédagogique des propriétés de  $r_n$ .

L'étude des propriétés, pour nos estimateurs construits à partir du filtre à mémoire complète et du filtre à mémoire tronquée, s'appuie sur certains de ces travaux. Plus précisément, pour ces deux cas, nous avons adapté au contexte du filtrage avec simulation de données, des résultats présentés par les auteurs précités ([14],[118],[62],[69]). Ces propriétés utiles à notre approche sont données dans l'annexe A.2. ( les notations employées dans l'annexe A sont conforme aux standard de l'estimation non paramétrique, c'est à dire, les rôles de  $x$  et  $y$  sont inversés).

#### 4.1.2 Estimation de l'espérance par le filtre à mémoire complète

Plaçons-nous dans le même cadre d'hypothèses que le filtre de Kalman : les fonctions  $f_t$  et  $h_t$  du système sont supposées connues. Il en est de même des propriétés statistiques des bruits et de  $\pi_0$  la loi de probabilité de l'état initial  $x_0$ . Pour simplifier, notre approche est exposée, sans perte de généralité, pour un système temps-invariant. Soit le système de la forme de (1.1) :

$$\begin{cases} x_t = f(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

Pour tout  $t$ , on suppose qu'à  $t$  fixé, la fonction ci-dessous est continue :

$$(y_1, \dots, y_t) \mapsto \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t).$$

Cette fonction correspond donc au filtre optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne.

Le couple de variables aléatoires  $(y_{1:t}, x_t)$  suit une loi que l'on note  $\mu_t$ . Le filtre optimal peut alors aussi s'écrire sous la forme suivante

$$\mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t) = \frac{\psi_t(y_{1:t})}{g_t(y_{1:t})}$$

où  $\psi_t(Y) = \int_x x d\mu_t(Y, x)$  et  $g_t$  la densité de la distribution de  $y_{1:t}$ .

Il s'agit à présent de déterminer des estimateurs de  $\psi_t$  et  $g_t$ , notés respectivement  $\psi_t^n$  et  $g_t^n$ , à partir de  $n$  trajectoires indépendantes du processus (1.1). Pour construire ces estimateurs par la méthode des noyaux de convolution, il est donc nécessaire de disposer de  $n$  représentants de  $\mu_t$ . Ce n'est pas le cas, mais la connaissance de (1.1), nous permet d'en générer. La méthode utilisée ici, pour générer les données, est semblable à celle développée au chapitre précédent, pour l'estimation de la densité du filtre optimal. Afin de faciliter la lecture nous la rappelons rapidement dans le paragraphe suivant.

### Génération des données

Soit un représentant de l'état initial  $\tilde{x}_0 \sim \pi_0$ . En lui appliquant (1.1)  $t$  fois, deux séquences :  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_t)$  et  $(\tilde{y}_1, \dots, \tilde{y}_t)$  sont engendrées. Il est alors possible de former le couple  $(\tilde{y}_{1:t}, \tilde{x}_t)$  qui est une réalisation de la loi  $\mu_t$ . En répétant  $n$  fois cette opération,  $n$  réalisations de la loi  $\mu_t$  :  $(\tilde{y}_{1:t}^1, \tilde{x}_t^1), \dots, (\tilde{y}_{1:t}^n, \tilde{x}_t^n)$  sont ainsi générées. Ces dernières permettent de construire l'estimation empirique  $\mu_t^n$  de  $\mu_t$ . Les méthodes de convolution usuelles permettent, à partir de ces mesures empiriques, d'estimer  $E[x_t | y_1, \dots, y_t]$ . Soit  $K$  un noyau de convolution de dimension  $qt$ , alors

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) = \frac{\psi_t^n(y_{1:t})}{g_t^n(y_{1:t})} = \frac{\frac{1}{nh_n^{tq}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i}{h_n}\right) \times \tilde{x}_t^i}{\frac{1}{nh_n^{tq}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i}{h_n}\right)}$$

correspond à l'estimateur de Nadaraya-Watson de  $\mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t)$ .  $\psi_t^n$  et  $g_t^n$  sont respectivement les estimateurs de  $\psi_t$  et  $g_t$  construits avec le noyau de convolution  $K$  et les estimateurs empiriques de  $\mu_t$ ,  $\mu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i, \tilde{x}_t^i}$  et de  $\nu_t$ ,  $\nu_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$ .

Avant d'établir les propriétés de convergence de cet estimateur, il est intéressant de remarquer qu'il est possible de lui conférer une forme particulière : celle de la sortie d'un réseau de neurones à bases radiales, mais différente de celle correspondant à l'approche neuronale de Yee ([133]) déjà citée.

Cette formalisation n'est pas indispensable pour étudier l'estimateur. Cependant, comme elle est à l'origine de nos recherches sur les filtres par noyaux de convolution, nous pensons que sa présentation conserve un intérêt.

### Formalisation en réseau de neurones à bases radiales

Construisons un réseau à  $n$  neurones. Les  $\tilde{y}_{1:t}^i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sont leurs centres et les  $\tilde{x}_t^i$  sont les coefficients de la combinaison linéaire de sortie. Soit  $K$  la fonction noyau commune à chacun des neurones. Les variables d'entrée sont les observations  $y_1, \dots, y_t$ . La sortie du réseau  $\mathcal{F}_t^n$  a la forme :

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) = \frac{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i}{h_n}\right) \times \tilde{x}_t^i}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i}{h_n}\right)} \quad (4.1)$$

qui correspond à notre estimateur de Nadaraya-Watson de  $\mathcal{F}_t$ . La figure (4.1) donne une représentation symbolique d'un tel réseau de neurones.

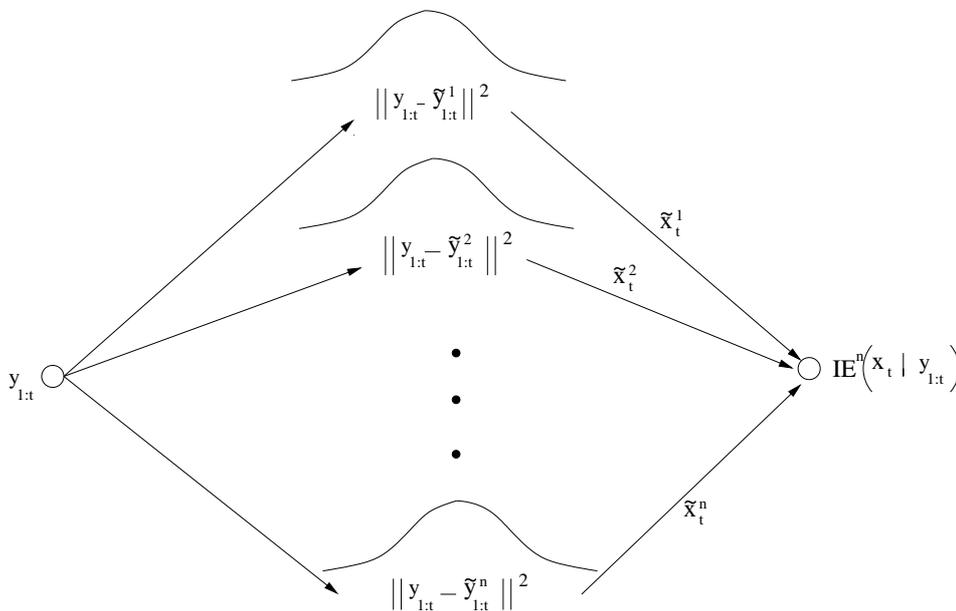


FIG. 4.1 – Schéma d'un réseau à bases radiales

### Mise en place de l'algorithme décrit selon l'approche "Réseau"

En théorie, il est donc possible à chaque instant  $t$ , de construire un réseau de neurones à bases radiales qui fournisse une estimation du filtre optimal. Pour que le temps de construction d'un tel réseau reste compatible avec le filtrage en ligne, il est nécessaire que la structure du réseau évolue de manière "réursive" : les centres des neurones doivent évoluer dans le temps, parallèlement à l'état du système. Afin d'expliquer l'algorithme, décrivons, sans perte de généralité, les étapes principales qui le constituent, pour des états  $x_t$  et des observations  $y_t$  de dimension 1.

#### Initialisation

La loi de probabilité de l'état initial  $x_0$ ,  $\pi_0$  est connue.

$n$  points,  $\tilde{x}_0^1, \tilde{x}_0^2, \dots, \tilde{x}_0^n$  sont générés suivant  $\pi_0$ . Ils sont les états initiaux des trajectoires de références au centre des noyaux.

L'application du système 1.1, à ces  $n$  points initiaux, engendre les  $n$  couples :  $(\tilde{x}_1^1, \tilde{y}_1^1), \dots, (\tilde{x}_1^n, \tilde{y}_1^n)$ .

Le poids associé à l'état de référence  $\tilde{x}_t^i$  dans la combinaison linéaire de sortie du réseau,  $K(\frac{y_t - \tilde{y}_t^i}{h_n})$ , est noté  $w_{t,i}$ . Du fait de l'absence d'information pour les états initiaux, tous les poids initiaux sont pris égaux à 1 :  $w_{0,i} = 1$  pour  $i = 1, \dots, n$ .

Il est à présent possible de commencer le filtrage. Le temps de départ est  $t = 1$ , puisque, pour  $t = 0$ , tous les éléments intervenant dans l'algorithme ont été précisés ci-dessus.

#### - Etape 1

Calcul des  $w_{t,i}$  pour  $i = 1, \dots, n$  :

$$w_{t,i} = w_{t-1,i} \times \exp \left\{ - \left\| \frac{y_t - \tilde{y}_t^i}{h_n} \right\|^2 \right\}$$

#### - Etape 2

Calcul de l'estimation de l'état :  $\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) = \frac{\sum_{i=1}^n w_{t,i} \times \tilde{x}_t^i}{\sum_{i=1}^n w_{t,i}}$  d'après (4.1).

#### - Etape 3

Mise à jour des trajectoires de référence : application du système (1.1) aux couples  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_t^i)$  pour obtenir  $(\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$ , pour  $i = 1, \dots, n$ .

$t = t + 1$  et retour à l'étape 1.

**Remarque :** En pratique, comme pour l'estimation de la densité du filtre optimal au chapitre précédent, il est préférable de modifier légèrement les étapes 2 et 3. Par exemple, à l'étape 2, il est possible d'ajouter un coefficient d'amortissement du passé  $a$ ,  $a \in ]0, 1[$ . Cette démarche se justifie empiriquement par le fait que le système est bruité. L'expression de l'étape 2 devient ainsi  $w_{t,i} = w_{t-1,i}^a \times \exp(-\|y_t - \tilde{y}_t^i\|^2/h_n)$ .

De plus, d'après la structure de l'étape 1, si un état de référence a un poids nul ; tous ses successeurs auront aussi un poids nul, cette trajectoire perd donc tout intérêt. Il est alors intéressant dans l'étape 3, de chercher les poids très faibles et de remplacer leurs états de référence par un de ceux qui ont les poids les plus élevés. Cette démarche est très voisine de celle utilisée dans le filtrage particulaire avec interaction.

### Etude de la convergence ponctuelle

Le mode de convergence de  $\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t)$  vers  $\mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)$  quand  $n$  tend vers l'infini est lié aux conditions imposées au noyau. Nous démontrons la convergence en probabilité dans ce qui suit. Pour plus de détails sur les autres modes de convergence, on peut se référer à ([14]).

**Théorème 4.1.1** *Supposons que  $E(\|x_t\|^2) < \infty$  et posons  $v(y_{1:t}) = V(x_t|y_{1:t})$ . Si  $\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t)$  est associé à un noyau de Parzen-Rosenblatt, alors en tout point de continuité  $y_{1:t}$  de  $g_t$ ,  $\mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)$  et de  $v$ , tel que  $g_t(y_{1:t}) \neq 0$  nous avons*

$$h_n \rightarrow 0, n h_n^{tq} \rightarrow \infty \implies \mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) \rightarrow \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t) \text{ en probabilité}$$

#### Démonstration :

On a

$$\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) = \frac{\psi_t^n(y_{1:t})}{g_t^n(y_{1:t})} \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t) = \frac{\psi_t(y_{1:t})}{g_t(y_{1:t})}$$

avec  $g_t^n$  l'estimateur de la densité des  $y_{1:t}$  associé au noyau  $K$ . D'après le théorème A.1.1 nous avons que

$$g_t^n \rightarrow g_t \text{ en moyenne quadratique.}$$

lorsque  $h_n \rightarrow 0$  et  $nh_n^{tq} \rightarrow \infty$ .

Il reste à démontrer que  $\psi_t^n$  tend vers  $\psi_t$ . Pour cela, mettons en évidence que  $V(\psi_t^n)$  tend vers zéro et que  $\mathbb{E}[\psi_t^n(y_{1:t})] \rightarrow \psi_t(y_{1:t})$ . ( $\mathbb{E}[\psi_t^n(y_{1:t})]$  désigne l'espérance de la fonction aléatoire  $\psi_t^n$  appliquée au point connu  $y_{1:t}$ ) :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\psi_t^n(y_{1:t})] &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{nh_n^{tq}} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_t^i K\left(\frac{y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i}{h_n}\right)\right] \\ &= \mathbb{E}[\tilde{x}_t^1 K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^1)] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[\tilde{x}_t K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}) | \tilde{y}_{1:t}]] \\ &= \mathbb{E}[K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}) \mathbb{E}[\tilde{x}_t | \tilde{y}_{1:t}]] \\ &= (K_{h_n} * G_t)(y_{1:t}) \end{aligned}$$

avec  $G_t(\tilde{y}_{1:t}) = g_t(\tilde{y}_{1:t}) \mathbb{E}[\tilde{x}_t | \tilde{y}_{1:t}]$ . D'après le lemme de Bochner (cf. A.1.2), on a, lorsque  $h_n$  tend vers 0

$$(K_{h_n} * G_t)(y_{1:t}) \rightarrow g_t(y_{1:t}) \mathbb{E}[x_t | y_{1:t}] = g_t(y_{1:t}) \frac{\psi_t(y_{1:t})}{g_t(y_{1:t})}$$

donc

$$\mathbb{E}[\psi_t^n(y_{1:t})] \rightarrow \psi_t(y_{1:t})$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned} V[\psi_t^n(y_{1:t})] &= \frac{1}{n} V[\tilde{x}_t K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})] \\ &= \frac{1}{n} \left[ \mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t' K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})] - \mathbb{E}[\tilde{x}_t K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})] \right. \\ &\quad \left. \times \mathbb{E}[\tilde{x}_t K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})]' \right] \end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t' K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})] &= \mathbb{E}[K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}) \mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t' | \tilde{y}_{1:t}]] \\ &= (K_{h_n}^2 * H_t)(y_{1:t}) \\ &= \frac{1}{h_n^{tq}} [h_n^{tq} (K_{h_n}^2 / \int K_{h_n}^2 d\tilde{y}_{1:t}) * H_t](y_{1:t}) \int K_{h_n}^2 d\tilde{y}_{1:t} \end{aligned}$$

avec  $H_t(\tilde{y}_{1:t}) = g_t(\tilde{y}_{1:t}) \mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t' | \tilde{y}_{1:t}]$ . En appliquant le lemme de Bochner au noyau  $h_n^{tq} K_{h_n}^2 / \int K_{h_n}^2 d\tilde{y}_{1:t}$  on obtient

$$h_n^{tq} \mathbb{E}[\tilde{x}_t \tilde{x}_t' K_{h_n}^2(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t})] \rightarrow g_t(y_{1:t}) \mathbb{E}[x_t x_t' | y_{1:t}] \int K^2 d\tilde{y}_{1:t}$$

ce qui permet d'écrire

$$nh_n^{tq} V[\psi_t^n(y_{1:t})] \rightarrow g_t(y_{1:t}) \mathbb{E}[x_t x_t' | y_{1:t}] \int K^2 d\tilde{y}_{1:t} - h_n^t g_t(y_{1:t})^2 \mathbb{E}[x_t | y_{1:t}] \mathbb{E}[x_t | y_{1:t}]'$$

Comme les deux termes du membre de droite sont finis, on en déduit le résultat.

**Théorème 4.1.2 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 -  $y_{1:t}$  est un point fixé de  $\mathbb{R}^{tq}$  tel que  $g_t(y_{1:t}) > 0$ .
- H2 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh^{tq}}{\log n} = \infty$ .
- H3 - Le noyau  $K$  est borné, intégrable et à support compact.
- H4 -  $\|x_t\| < M < \infty$
- H5 -  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{1:t}$ .
- H6 - Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .

Alors

$$\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t) = O(h^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh^{tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Adaptation du théorème A.2.1 au contexte du filtrage.

**Théorème 4.1.3 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de Lipschitz)** *Si les hypothèses H1-H4 du théorème 4.1.2 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $\beta$ -lipschitziennes alors*

$$|\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)| = O(h^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh^{tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Adaptation du théorème A.2.2 au contexte du filtrage.

### Étude de la convergence uniforme

Pour l'étude de la convergence uniforme, je suppose que les observations  $y_{1:t}$  appartiennent à un compact  $C$ .

**Théorème 4.1.4 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 - Il existe  $m > 0$  tel que  $\inf_{y_{1:t} \in C} g_t(y_{1:t}) > m$ .
- H2 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh^{tq}}{\log n} = \infty$ .
- H3 - Le noyau  $K$  est borné, intégrable et à support compact.
- H4 -  $\|x_t\| < M < \infty$
- H5 - Le noyau  $K$  est lipschitzien sur  $C$ .
- H6 -  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables dans  $C$ .
- H7 - Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .

Alors

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t)| = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Adaptation du théorème A.2.3 au contexte du filtrage.

**Théorème 4.1.5 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de Lipschitz)**

Si les hypothèses H1-H5 du théorème 4.1.4 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t | y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $\beta$ -lipschitziennes sur  $C$  alors

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t)| = O(h_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Adaptation du théorème A.2.4 au contexte du filtrage.

**Corollaire 4.1.5.1 (vitesse optimale) Soit**

$$h_n = \alpha \left( \frac{n}{\log n} \right)^{-\frac{1}{4+tq}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

alors sous les hypothèses du théorème 4.1.2 on a

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t) = O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{-s}{2s+tq}}\right) \quad p.co$$

et sous les hypothèses du théorème 4.1.4 on a

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t)| = O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{-s}{2s+tq}}\right) \quad p.co$$

**Théorème 4.1.6 (vitesse optimale de la convergence en moyenne quadratique)**

Supposons les conditions suivantes vérifiées :

- $g_t(y_{1:t}) > 0$ ,  $y_{1:t}$  point fixé de  $\mathbb{R}^{tq}$ .
- $\mathbb{E}(x_t | y_{1:t})$  et  $g_t$  sont deux fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{1:t}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{tq} = \infty$ .
- $u \mapsto \mathbb{E}[x_t^2 | u]$  est continue au point  $y_{1:t}$ .
- $K$  est borné, intégrable, positif, symétrique et à support compact.
- $K$  est un noyau d'ordre 2.

Alors en prenant

$$h_n = \alpha n^{-\frac{1}{4+tq}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)]^2 = O(n^{-\frac{4}{4+tg}})$$

**Démonstration :** Adaptation du théorème A.2.6 au contexte du filtrage.

### 4.1.3 Estimation de l'espérance par le filtre à mémoire tronquée

Rappelons qu'en considérant un filtre avec une mémoire tronquée de longueur  $T$ , on suppose implicitement, que pour déterminer  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  l'estimation de l'état  $x_t$ , il est suffisant de connaître  $y_t, y_{t-1}, \dots, y_{t-T}$ . Cette hypothèse peut se justifier empiriquement par le fait que le système est bruité : plus une observation est ancienne moins elle est influente sur  $x_t$ . Il existe alors un  $T$  tel que l'information apportée par  $y_1, \dots, y_{t-T-1}$  est négligeable comparée à celle apportée par  $y_{t-T}, \dots, y_t$ .

Sur le plan pratique cette troncature est très bénéfique car, dans le cadre de l'approche par réseau à bases radiales, il est alors possible de construire un réseau avec une structure fixe dans le temps. De ce fait, la dimension des noyaux, appliqués en chaque neurone, est constante.

Le problème se formalise de la même façon que précédemment. L'évolution de l'état du système  $x_t$  est régie par (1.1) et seules les variables  $y_t$  sont observées :

$$\begin{cases} x_t = f(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

Le filtre tronqué optimal au sens de l'erreur quadratique moyenne est

$$\mathbb{E}(x_t|y_{t-T}, \dots, y_t)$$

Le couple de variables aléatoires  $(y_{t-T:t}, x_t)$  suit la loi de probabilité  $\mu_{t,T}$ . Le filtre optimal tronqué peut, par conséquent, s'écrire sous la forme suivante :

$$\mathbb{E}(x_t|y_{t-T}, \dots, y_t) = \frac{\psi_{t,T}(y_{t-T:t})}{g_{t,T}(y_{t-T:t})}$$

où  $\psi_{t,T}(y_{t-T:t}) = \int_{x_t} x_t d\mu_{t,T}(y_{t-T:t}, x_t)$  et  $g_{t,T}$  la densité de la distribution des  $y_{t-T:t}$ .

Comme précédemment, on construit à l'aide des noyaux de convolution,  $\psi_{t,T}^n$  et  $g_{t,T}^n$ , estimateurs respectifs de  $\psi_{t,T}$  et  $g_{t,T}$ . Pour ce faire, on génère un échantillon

de couples utilisés pour obtenir les mesures empiriques  $\mu_{t,T}^n$  et  $\nu_{t,T}$ , ce qui conduit à :

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T}, \dots, y_t) = \frac{\psi_{t,T}^n(y_{t-T:t})}{g_{t,T}^n(y_{t-T:t})} = \frac{\frac{1}{nh_n^{Tq}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i}{h_n}\right) \times \tilde{x}_t^i}{\frac{1}{nh_n^{Tq}} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{y_{t-T:t} - \tilde{y}_{t-T:t}^i}{h_n}\right)}$$

### Étude de la convergence ponctuelle

Nous supposons ici qu'il est possible de restreindre la mémoire à une profondeur  $T \in \mathbb{N}^*$ .

**Théorème 4.1.7** *Supposons que  $E(\|x_t\|^2) < \infty$  et posons  $v(y_{t-T:t}) = V(x_t | y_{t-T:t})$ . Si  $\mathcal{F}_{t,T}^n$  est associé à un noyau de Parzen-Rosenblatt, alors en tout point de continuité  $y_{t-T:t}$  de  $g_{t,T}$ ,  $\mathcal{F}_{t,T}$  et de  $v$ , tel que  $g_{t,T}(y_{t-T:t}) > 0$  nous avons*

$$h_n \rightarrow 0, nh_n^{Tq} \rightarrow \infty \implies \mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T:t}) \rightarrow \mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t}) \text{ en probabilité}$$

**Démonstration :** La démonstration est identique à celle du théorème 4.1.1.

**Théorème 4.1.8 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 -  $y_{t-T:t}$  est un point fixé de  $\mathbb{R}^{Tq}$  tel que  $g_t(y_{t-T:t}) > 0$ .
- H2 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{Tq}}{\log n} = \infty$ .
- H3 - Le noyau  $K$  est borné, intégrable et à support compact.
- H4 -  $\|x_t\| < M < \infty$
- H5 -  $\mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t})$  et  $g_{t,T}$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{t-T:t}$ .
- H6 - Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .

Alors

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t}) = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{Tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Voir théorème 4.1.2.

**Théorème 4.1.9 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de Lipschitz)** *Si les hypothèses H1-H4 du théorème 4.1.8 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})$  et  $g_{t,T}$  sont  $\beta$ -lipschitziennes alors*

$$|\mathbb{E}^n(x_t|y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})| = O(h_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{Tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Voir théorème 4.1.3.

### Etude de la convergence uniforme

Pour l'étude de la convergence uniforme, en plus de restreindre la mémoire à une profondeur  $T \in \mathbb{N}^*$ , on suppose que les observations  $y_{t-T:t}$  appartiennent à un compact  $C$ .

**Théorème 4.1.10 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 - *Il existe  $m > 0$  tel que  $\inf_{y_{t-T:t} \in C} g_{t,T}(y_{t-T:t}) > m$ .*
- H2 -  *$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{Tq}}{\log n} = \infty$ .*
- H3 - *Le noyau  $K$  est borné, intégrable et à support compact.*
- H4 -  *$\|x_t\| < M < \infty$*
- H5 - *Le noyau  $K$  est lipschitzien sur  $C$ .*
- H6 -  *$\mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})$  et  $g_{t,T}$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables dans  $C$ .*
- H7 - *Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .*

Alors

$$\sup_{y_{t-T:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t|y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})| = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{Tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Voir théorème 4.1.4.

**Théorème 4.1.11 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de Lipschitz)** *Si les hypothèses H1-H5 du théorème 4.1.10 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})$  et  $g_{t,T}$  sont  $\beta$ -lipschitziennes sur  $C$  alors*

$$\sup_{y_{t-T:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t|y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t|y_{t-T:t})| = O(h_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^{Tq}}}\right), \quad p.co$$

**Démonstration :** Voir théorème 4.1.5.

**Corollaire 4.1.11.1 (vitesse optimale)** *Soit*

$$h_n = \alpha \left( \frac{n}{\log n} \right)^{-\frac{1}{4+d}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

*alors sous les hypothèses du théorème 4.1.8 on a*

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t}) = O \left( \left( \frac{n}{\log n} \right)^{\frac{-s}{2s+Tq}} \right) \quad p.co$$

*et sous les hypothèses du théorème 4.1.10 on a*

$$\sup_{y_{t-T:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t})| = O \left( \left( \frac{n}{\log n} \right)^{\frac{-s}{2s+Tq}} \right) \quad p.co$$

**Théorème 4.1.12 (vitesse optimale de la convergence en moyenne quadratique)** *Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

- $g_{t,T}(y_{t-T:t}) > 0$ ,  $y_{t-T:t}$  point fixé de  $\mathbb{R}^{Tq}$ .
- $\mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t})$  et  $g_{t,T}$  sont 2 fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{t-T:t}$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} n h_n^{Tq} = \infty$ .
- $u \mapsto \mathbb{E}[x_t^2 | u]$  est continue au point  $y_{t-T:t}$ .
- $K$  est borné, intégrable, positif, symétrique et à support compact.
- $K$  est un noyau d'ordre 2.

*Alors en prenant*

$$h_n = \alpha n^{-\frac{1}{4+Tq}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

*on a*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^n(x_t | y_{t-T:t}) - \mathbb{E}(x_t | y_{t-T:t})]^2 = O(n^{-\frac{4}{4+Tq}})$$

**Démonstration :** Voir théorème 4.1.6

#### 4.1.4 Estimation de l'espérance par le filtre avec sélection

Dans cette partie, les particules  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_{1:t}^i)$ , avec  $i = 1, \dots, n$ , sont générées de manière à ce que  $\tilde{y}_{1:t}^i \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ . Les variables d'observation des particules

simulées, sont ainsi contenues dans un tube de largeur  $\epsilon$  centré sur les vraies observations  $y_{1:t}$ .

A partir de telles données, l'estimateur naturel est

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \tilde{x}_t^i.$$

Cet estimateur a l'avantage d'être simple à calculer, mais la quantité qu'il estime est  $\mathbb{E}[x_t | \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})]$ . Pour assurer sa convergence vers  $\mathbb{E}[x_t | y_{1:t}]$ , la largeur du tube  $\epsilon$  doit impérativement tendre vers zéro.

Remarquons que, cet estimateur naturel est en fait un cas particulier de l'estimateur général :

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i) \times \tilde{x}_t^i}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)} \quad (4.2)$$

avec  $K$  un noyau à support compact et  $h_n$  tel, que si  $\tilde{y}_{1:t}^i \notin \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$  alors  $K_{h_n}(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i) = 0$ .

L'étude des propriétés de cet estimateur est plus délicate que celle des deux précédents.

### Étude de la convergence ponctuelle

**Théorème 4.1.13 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 -  $y_{1:t}$  est un point fixé de  $\mathbb{R}^{tq}$  tel que  $g_t(y_{1:t}) > 0$ .
- H2 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n\epsilon_n^{-tq})} = \infty$ .
- H3 - Le noyau  $K$  est symétrique, borné, intégrable et à support compact.
- H4 -  $h_N$  est tel que  $K_{h_N}$  est nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ .
- H5 -  $\|x_t\| < M < \infty$
- H6 - La densité des observations  $g_t$  est continue sur  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$
- H7 -  $\mathbb{E}(x_t | y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{1:t}$ .
- H8 - Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .

Alors presque sûrement

$$\mathbb{E}^n(x_t | y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t | y_1, \dots, y_t) = O(\epsilon_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log(n\epsilon_n^{-tq})}{n}}\right),$$

**Démonstration :** D'après les considérations de la démonstration du théorème 3.4.4

$$\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) = \mathbb{E}^N(x_t|y_{1:t})$$

D'après le théorème 4.1.2,

$$\mathcal{F}_t^N(y_{1:t}) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t) = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log N}{Nh_N^{tq}}}\right),$$

le lemme 3.4.2 donne donc le résultat.

**Théorème 4.1.14 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de Lipschitz)** *Si les hypothèses H1-H6 du théorème 4.1.13 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $\beta$ -lipschitziennes alors presque sûrement*

$$|\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)| = O(\epsilon_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log(n\epsilon_n^{-tq})}{n}}\right)$$

**Démonstration :** Mêmes arguments que pour la démonstration du théorème 4.1.13.

### Etude de la convergence uniforme

Pour l'étude de la convergence uniforme, les observations  $y_{1:t}$ , sont supposées appartenir à un compact  $C$ .

**Théorème 4.1.15 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :*

- H1 - *Il existe  $m > 0$  tel que  $\inf_{y_{1:t} \in C} g_t(y_{1:t}) > m$ .*
- H2 -  *$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log(n\epsilon_n^{-tq})} = \infty$ .*
- H3 - *Le noyau  $K$  est symétrique, borné, intégrable et à support compact.*
- H4 -  *$h_N$  est tel que  $K_{h_N}$  est nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ .*
- H5 -  *$\|x_t\| < M < \infty$*
- H6 - *Le noyau  $K$  est lipschitzien sur  $C$ .*
- H7 -  *$\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $s > 0$  fois continûment différentiables dans  $C$ .*
- H8 - *Le noyau  $K$  est d'ordre  $s$ .*

*Alors presque sûrement*

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)| = O(\epsilon_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log(n\epsilon_n^{-tq})}{n}}\right)$$

**Démonstration :** Mêmes arguments que pour la démonstration du théorème 4.1.13.

**Théorème 4.1.16 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de Lipschitz)** *Si les hypothèses H1-H6 du théorème 4.1.15 sont vérifiées et si  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont  $\beta$ -lipschitziennes sur  $C$  alors presque sûrement*

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)| = O(\epsilon_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n \epsilon_n^{-tq}}{n}}\right)$$

**Démonstration :** Mêmes arguments que pour la démonstration du théorème 4.1.13.

**Corollaire 4.1.16.1 (vitesse optimale)** *Soit*

$$\epsilon_n = \alpha \frac{(tq)^{1/s}}{n^{1/(2s)}} \quad 0 < \alpha < \infty$$

*alors sous les hypothèses du théorème 4.1.13 on a*

$$\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t) = O\left(\sqrt{\frac{(\frac{tq}{2s} + 1) \log n}{n}}\right) ps$$

*et sous les hypothèses du théorème 4.1.15 on a*

$$\sup_{y_{1:t} \in C} |\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)| = O\left(\sqrt{\frac{(\frac{tq}{2s} + 1) \log n}{n}}\right) ps$$

**Théorème 4.1.17 (vitesse de convergence en moyenne quadratique)** *Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

- H1 -  $g_t(y_{1:t}) > 0$ ,  $y_{1:t}$  point fixé de  $\mathbb{R}^{tq}$ .
- H2 -  $\mathbb{E}(x_t|y_{1:t})$  et  $g_t$  sont deux fois continûment différentiables au voisinage de  $y_{1:t}$ .
- H3 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0$ .
- H4 -  $u \mapsto \mathbb{E}[x_t^2|u]$  est continue au point  $y_{1:t}$ .
- H5 -  $K$  est borné, intégrable, positif, symétrique et à support compact.
- H6 -  $h_N$  est tel que  $K_{h_N}$  est nul en dehors de  $\mathcal{B}_{\epsilon_n}(y_{1:t})$ .
- H7 -  $K$  est un noyau d'ordre 2.

*Alors*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)]^2 = O(\epsilon_n^4) + O(1/n)$$

**Démonstration :** D'après la démonstration du théorème A.2.5 et les considérations du début de la démonstration du théorème 3.4.4 on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)]^2 &= \mathbb{E}[\mathcal{F}_t^N(y_{1:t}) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)]^2 \\ &= O(h_N^4) + O(1/(Nh_N^{4q})) \end{aligned}$$

le lemme 3.4.2 permet de conclure.

**Corollaire 4.1.17.1** *Supposons les hypothèses du théorème 4.1.17 vérifiées, alors en prenant  $\epsilon_n = O(n^{-1/4})$  on a*

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}^n(x_t|y_1, \dots, y_t) - \mathbb{E}(x_t|y_1, \dots, y_t)]^2 = O(1/n)$$

### 4.1.5 Estimation de l'espérance par le filtre avec ré-échantillonnage

L'estimation de l'espérance peut se faire indépendamment de l'estimation de la densité pour le filtre avec ré-échantillonnage. Cependant, le calcul de l'estimation de l'espérance s'intègre, aisément, dans l'algorithme décrit dans la partie 3.2.4 du chapitre précédent. Il suffit de calculer, juste après le ré-échantillonnage de l'étape 1, où  $\bar{x}_t^1, \dots, \bar{x}_t^n \sim p_t^n$  :

$$\hat{x}_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_t^i. \quad (4.3)$$

**Théorème 4.1.18** *Sous les hypothèses du théorème 3.5.2, si pour tout  $t$  le support de  $p(x_t|y_{1:t})$  est contenu dans un compact  $C_t$  connu alors*

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{q+d}}{\log n} = 0 \end{cases} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{x}_t^n - \mathbb{E}[x_t|y_{1:t}]| = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Notons  $\mathbb{E}_{p_t}[x|y_{1:t}] = \mathbb{E}[x_t|y_{1:t}]$  l'espérance du filtre optimal et  $\mathbb{E}_{p_t^n}[x|y_{1:t}]$  l'espérance du filtre à convolution avec ré-échantillonnage. Comme  $x \in \mathbb{R}^d$ , notons  $x = (u_1, \dots, u_d)$  et  $\hat{x}_t^n = (\hat{u}_{t,1}^n, \dots, \hat{u}_{t,d}^n)$ . Par définition,  $\mathbb{E}_{p_t}[x|y_{1:t}] = (\mathbb{E}_{p_t}[u_1|y_{1:t}], \dots, \mathbb{E}_{p_t}[u_d|y_{1:t}])$ , nous devons donc montrer

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\hat{u}_{t,i}^n - \mathbb{E}_{p_t}[u_i|y_{1:t}]| = 0 \quad p.s. \quad \text{pour } i = 1, \dots, d \quad (4.4)$$

Sans perte de généralité prouvons (4.4) pour  $u_1$  :

$$|\hat{u}_{t,1}^n - \mathbb{E}_{p_t}[u_1|y_{1:t}]| \leq |\hat{u}_{t,1}^n - \mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}]| + |\mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}] - \mathbb{E}_{p_t}[u_1|y_{1:t}]|$$

Tout d'abord étudions le comportement du second terme :

$$|\mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}] - \mathbb{E}_{p_t}[u_1|y_{1:t}]| = \left| \int u_1 p_t^n(u_1|y_{1:t}) du_1 - \int u_1 p_t(u_1|y_{1:t}) du_1 \right|$$

Raisonnons par l'absurde : supposons que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int u_1 p_t^n(u_1|y_{1:t}) du_1 - \int u_1 p_t(u_1|y_{1:t}) du_1 \right| = a > 0$$

Alors comme le support de  $p(x_t|y_{1:t})$  est contenu dans le compact  $C_t$  connu, il en est de même des estimations  $p_t^n(x_t|y_{1:t})$ , puisqu'on attribue alors un poids nul aux particules extérieures à  $C_t$ . Si on note  $C_t^1$ , la restriction de  $C_t$  à la première composante de  $x_t$ ,  $u_1$  on a alors :

$$\begin{aligned} a &= \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{C_t^1} u_1 p_t^n(u_1|y_{1:t}) du_1 - \int_{C_b} u_1 p_t(u_1|y_{1:t}) du_1 \right| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \int_{C_t^1} |u_1| |p_t^n(u_1|y_{1:t}) - p_t(u_1|y_{1:t})| du_1 \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \max_{C_t^1} |u_1| \int_{C_b} |p_t^n(u_1|y_{1:t}) - p_t(u_1|y_{1:t})| du_1 \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \max_{C_t^1} |u_1| \|p_t^n(u_1|y_{1:t}) - p_t(u_1|y_{1:t})\|_{L_1} \\ &= 0 \quad a.s., \quad \text{d'après le théorème 3.5.2} \end{aligned}$$

ce qui contredit  $0 < a$ .

On a donc

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}] - \mathbb{E}_{p_t}[u_1|y_{1:t}]| = 0 \quad p.s.$$

Comme par hypothèse la densité  $p_t^n$  est restreinte à un compact connu, il existe un  $M > 0$  tel que  $\mathbb{E}_{p_t^n}[u_1^4|y_{1:t}] \leq M$  et  $\mathbb{E}_{p_t^n}[u_1^2|y_{1:t}] \leq M$ .

Il reste à montrer que

$$|\hat{u}_{t,1}^n - \mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}]| \rightarrow 0 \quad p.s.. \quad (4.5)$$

Nous avons

$$\begin{aligned} |\hat{u}_{t,1}^n - \mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}]| &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{u}_{t,1}^i - \mathbb{E}_{p_t^n}[u_1|y_{1:t}] \right| \\ &= \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_i \right| \end{aligned}$$

où  $Z_i = \bar{u}_{t,1}^i - \mathbb{E}_{p_t^n}[u|y_{1:t}]$ . Les variables  $Z_1, \dots, Z_n$  sont identiquement distribuées et indépendantes conditionnellement à  $\mathcal{F}_{t-1}$  l'ensemble des variables simulées jusqu'à l'instant  $t-1$ . On a  $\mathbb{E}[Z_i^2] \leq M$ ,  $\mathbb{E}[Z_i^4] \leq M$  et  $\mathbb{E}[Z_i|\mathcal{F}_{t-1}] = 0$  car en toute rigueur  $\mathbb{E}_{p_t^n}[u|y_{1:t}] = \mathbb{E}_{p_t^n}[u|y_{1:t}, \mathcal{F}_{t-1}]$  puisque cette espérance dépend de  $\mathcal{F}_{t-1}$  au travers de  $p_t^n$ .

On obtient

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^n Z_i\right)^4\right] = n\mathbb{E}[Z_1^4] + \frac{n(n-1)}{2}\mathbb{E}[Z_1^2]^2$$

car  $\mathbb{E}[Z_i Z_j Z_k Z_l] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Z_i|\mathcal{F}_{t-1}]\mathbb{E}[Z_j Z_k Z_l|\mathcal{F}_{t-1}]] = 0$  pour tout triplet  $(j, k, l)$  de  $\{1, \dots, n\} - i$ . On en déduit, d'après l'inégalité de Markov-Tchebychev

$$\begin{aligned} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\right| > \varepsilon\right) &\leq \frac{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i\right|^4}{\varepsilon^4} \\ &\leq \frac{\mathbb{E}[Z_1^4]}{n^3\varepsilon^4} + \frac{\mathbb{E}[Z_1^2]^2}{2n^2\varepsilon^4} \\ &\leq \frac{M}{n^3\varepsilon^4} + \frac{M^2}{2n^2\varepsilon^4} \end{aligned}$$

Comme la série de terme général  $\frac{M}{n^3\varepsilon^4} + \frac{M^2}{2n^2\varepsilon^4}$  est convergente, d'après le lemme de Borel-Cantelli, on a que  $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$  converge presque sûrement vers 0. Le résultat (4.5) est ainsi prouvé.

## 4.2 Mode conditionnel

Contrairement à la médiane, l'utilisation du mode de la distribution comme estimateur de l'état présente certains avantages. Tout d'abord, c'est un estimateur plus robuste que celui de la moyenne mais, comme il a été expliqué précédemment, cette qualité est moins critique dans ce contexte de filtrage. Le mode est plus avantageux que la moyenne, essentiellement lorsque la distribution d'intérêt est multimodale, avec un mode plus grand que les autres. Dans ce cas, la moyenne empirique peut fournir des valeurs totalement improbables (comprises entre deux modes) alors que le mode empirique fournit un des modes de la distribution.

L'estimation du mode d'une densité de probabilité est un problème ancien de la statistique, (voir Sager([115]) pour une revue mathématique et historique), qui pose des difficultés hors du cadre des modèles paramétriques, notamment, pour l'estimation de densités à l'aide de noyaux de convolution. L'estimation du mode

de la densité du filtre optimal, au travers de nos filtres, est donc assez délicate. En effet, au problème de l'estimation du mode pour l'estimateur à noyau de la densité, s'ajoute celui que la densité génératrice des particules n'est qu'une approximation de la densité du filtre optimal.

Un des premiers à considérer ce problème pour le cas univarié fut Parzen ([106]). Il a montré, que sous certaines conditions, le maximum de l'approximation de la densité par noyau de convolution est un estimateur convergent et asymptotiquement normal du mode pour des variables indépendantes identiquement distribuées (i.i.d.). La plupart des nombreux développements consécutifs à ces travaux, s'intéressent à la normalité asymptotique, par exemple on peut citer Samanta ([116]) pour le cas multivarié, Eddy ([60]), Romano ([114]) pour un affaiblissement des hypothèses. Vieu ([126]) en 1996, a comparé les estimateurs à noyaux du mode globaux et locaux (choix du  $h_n$ ).

Les propriétés de convergence et de normalité asymptotique ont aussi été établies pour le mode conditionnel par Samanta & Thavasneswaran ([117]). De même, des résultats ont aussi été obtenus pour des données dépendantes. Comme ce cas sort de notre contexte, nous ne nous étendrons pas sur ce point. Pour davantage d'information, on peut se référer, par exemple, à Berlinet & al. ([8]).

La plupart des estimateurs du mode  $\theta$  proposés dans la littérature, dont ceux évoqués ci-dessus, s'expriment sous la forme

$$\hat{\theta}_n \in \operatorname{argmax}_{\theta} f_n(\theta)$$

où  $f_n$  est la densité estimée de l'échantillon  $x_1, \dots, x_n$ . Parfois, ils sont aussi exprimés comme le zéro de la dérivée de  $f_n$ , les hypothèses de convergence sont alors modifiées. Le principal problème est donc, qu'en pratique, le temps de calcul est très élevé. En effet, une procédure de maximisation, même optimisée, requiert toujours de nombreux calculs de la fonction  $f_n$  et, pour minimiser le risque de tomber sur un maximum local il est préférable de renouveler plusieurs fois la maximisation avec des points de départ différents. De plus, comme l'a remarqué Devroye ([49]), ces méthodes usuelles de recherche de l'"argmax" fonctionnent correctement seulement lorsque  $f_n$  est assez régulière : continue, unimodale, ... Finalement, en pratique, l'argmax est approximé par une maximisation sur un maillage de l'espace. Mais, lorsque la dimension de l'espace d'état augmente, le nombre de noeuds de la grille augmente exponentiellement, le temps de calcul devient donc considérable.

Une telle technique n'est donc pas du tout adaptée au filtrage en ligne d'un système dynamique puisqu'elle est trop coûteuse en terme de temps de calculs. Par

contre une nouvelle approche du problème, proposée par Abraham & al. ([1]) semble bien mieux convenir. Ces auteurs proposent plutôt de prendre

$$\hat{\theta}_n \in \operatorname{argmax}_{\theta \in \{x_1, \dots, x_n\}} f_n(\theta).$$

Cela revient à prendre le maillage le plus naturel qui soit, puisque les points  $x_1, \dots, x_n$  sont naturellement concentrés autour de leur mode. Ainsi, pratiquement, il est seulement nécessaire de calculer  $n$  fois,  $f_n$  pour obtenir l'estimateur. Cette qualité numérique permet d'introduire l'estimation du mode en cours de filtrage. De plus, cet estimateur du mode a d'aussi bonnes propriétés théoriques que ses concurrents (Abraham & al. [1],[2]).

Une adaptation de cette dernière approche est proposée, en plus de l'approche classique, pour nos filtres par convolution, dans la suite.

Pour le contexte du filtrage, le mode  $m$  est défini par

$$m \in \operatorname{argmax}_{x_t} p_t(x_t | y_{1:t}).$$

Naturellement, les estimations proposées sont de la forme

$$\hat{m}_n \in \operatorname{argmax}_{x_t} \hat{p}_t^n(x_t | y_{1:t}).$$

où  $\hat{p}_t^n(x_t | y_{1:t})$  est une estimation de la densité du filtre optimal.

Selon la nature du filtre, à ré-échantillonnage ou pas, l'étude des propriétés théoriques de l'estimation du mode sera différente. Ces deux cas sont donc abordés au travers des deux sections suivantes.

### 4.2.1 Estimation du mode par les filtres à convolution simple

Tous les développements de cette section sont réalisés pour le filtre à convolution simple. Cependant, ils restent totalement valables pour le filtre à mémoire tronquée, pour lequel il suffit de restreindre les dimensions.

Nous généralisons au cas multivarié et adaptons au contexte du filtrage, l'approche proposée par Samanta & Thavaneswaran ([117]).

Nous supposons que pour toutes observations  $y_{1:t}$ ,  $p_t(x_t | y_{1:t})$  est uniformément continue en  $x_t$  et admet un unique mode  $m$  défini par

$$p_t(m(y_{1:t}) | y_{1:t}) = \max_{x_t} p_t(x_t | y_{1:t})$$

L' hypothèse d'unicité du mode peut sembler forte, cependant, le choix du mode comme estimateur de la valeur de l'état n'est pas pertinent en dehors de ce contexte.

Tout d'abord, rappelons la forme de l'estimation du filtre optimal fourni par le filtre à convolution simple :

$$\hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(x_t - \tilde{x}_t^i) K_h(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}{\sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)}$$

L'estimation de  $m$ ,  $\hat{m}_n$  est donc définie par

$$\hat{p}_t^n(\hat{m}_n|y_{1:t}) = \max_{x_t} \hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t}) \quad (4.6)$$

**Théorème 4.2.1** Soit  $z = (x_t, y_{1:t})$ , si le noyau  $K$  est une densité bornée, si de plus

- $\sup_z \|z\|^{tq+d} K(z) < \infty$
- Il existe  $C > 0$ , tel que  $\sup_z |K(z+v) - K(z)| \leq C\|v\|$ ,  $v \in \mathbb{R}^{tq+d}$
- La densité conjointe  $p_{XY}$  est uniformément continue et vérifie  $\int \|z\|^\gamma p_{XY}(z) dz < \infty$  pour certains  $\gamma > 0$
- La densité marginale  $p_Y$  est positive et continue au point  $y_{1:t}$
- La densité du filtre optimal  $p(x_t|y_{1:t})$  est bornée pour  $y_{1:t}$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{m}_n = m \quad ps$$

**Démonstration :** Soient  $p_{XY}(x_t, y_{1:t})$  la densité conjointe de  $x_t$  et  $y_{1:t}$ ,  $p_Y(y_{1:t})$  la densité marginale de  $y_{1:t}$ . Suivant ces notations, leurs approximations respectives sont

$$\hat{p}_{XY}^n(x_t, y_{1:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(x_t - \tilde{x}_t^i) K_h(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)$$

et

$$\hat{p}_Y^n(y_{1:t}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(y_{1:t} - \tilde{y}_{1:t}^i)$$

On a

$$\begin{aligned} \sup_{x_t} |p_t(x_t|y_{1:t}) - \hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t})| &\leq \frac{1}{\hat{p}_Y^n(y_{1:t})} \sup_{x_t} |p_{XY}(x_t, y_{1:t}) - \hat{p}_{XY}^n(x_t, y_{1:t})| \\ &\quad + \sup_{x_t} p_t(x_t|y_{1:t}) \left| 1 - \frac{p_Y(y_{1:t})}{\hat{p}_Y^n(y_{1:t})} \right| \end{aligned}$$

D'après le théorème A.1.3, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x_t} |p_{XY}(x_t, y_{1:t}) - \hat{p}_{XY}^n(x_t, y_{1:t})| = 0 \quad ps$$

de plus, selon le théorème A.1.2 on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{p}_Y^n(y_{1:t}) = p_Y(y_{1:t}) \quad ps$$

Comme par hypothèse,  $p_t(x_t|y_{1:t})$  est bornée, on en déduit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x_t} |p_t(x_t|y_{1:t}) - \hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t})| = 0 \quad ps$$

d'où le résultat.

Comme nous l'avons évoqué dans l'introduction de la partie sur le mode, il est possible de considérer un estimateur du mode,  $\tilde{m}_n$ , ne faisant pas intervenir de procédure d'optimisation. Il est défini par :

$$\hat{p}_t^n(\tilde{m}_n|y_{1:t}) = \max_{x_t \in S_n} \hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t}) \quad (4.7)$$

avec  $S_n = \{\tilde{x}_t^i\}_{i=1, \dots, n}$ . Le gain en terme de temps de calcul d'un tel estimateur est évident, puisqu'il suffit d'évaluer  $\hat{p}_t^n$ ,  $n$  fois pour l'obtenir.

Cet estimateur (4.7), comme le montre le théorème 4.2.2, possède d'aussi bonnes propriétés théoriques que le précédent (4.6). Avant d'énoncer ce résultat, il est nécessaire d'introduire, conformément à Abraham & al. ([1], [2]), les ensembles "ligne de niveau"  $A(\epsilon)$  :

$$\forall \epsilon > 0, A(\epsilon) = \{x \in \mathbb{R}^d : p_t(x|y_{1:t}) > p_t(m|y_{1:t}) - \epsilon\}$$

ainsi que leurs diamètres  $\text{diam}A(\epsilon)$  :

$$\text{diam}A(\epsilon) = \sup\{\|x - y\| : x, y \in A(\epsilon)\}$$

**Théorème 4.2.2** *Sous les hypothèses du théorème 4.2.1, si de plus,  $p_t(x_t|y_{1:t})$  vérifie  $A(\epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{tq+d}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{m}_n = m \quad ps$$

**Démonstration :** La preuve s'inspire de Abraham & al. ([1]) et Romano ([114]). Elle utilise les deux lemmes suivants, dont la preuve est établie dans Abraham & al. ([1]).

**Lemme 4.2.1** Si  $A(\epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  alors pour tout  $\delta > 0$ ,  $\sup_{V_\delta^c(m)} p_t < p_t(m|y_{1:t})$

**Lemme 4.2.2** Si  $p_t(x_t|y_{1:t})$  vérifie  $A(\epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  alors, presque sûrement, pour tout  $\delta > 0$ ,  $\max_{S_n \cap V_\delta(m)} p_t \rightarrow p_t(m|y_{1:t})$

avec  $V_\delta(m)$  la boule ouverte de rayon  $\delta$  centrée en  $m$  et  $V_\delta^c(m)$  son complémentaire.

Pour tout  $\delta > 0$ , d'après le lemme 4.2.1,  $\sup_{V_\delta^c(m)} p_t < p_t(m|y_{1:t})$ . Soit  $\varepsilon_\delta = p_t(m|y_{1:t}) - \sup_{V_\delta^c(m)} p_t$ , comme d'après le théorème 4.2.1, on a  $\sup |p_t - \bar{p}_t^n| \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini, il existe  $N(\varepsilon_\delta)$  tel que pour tout  $n > N(\varepsilon_\delta)$  on a

$$\sup_{V_\delta^c(m)} |p_t - \bar{p}_t^n| < \varepsilon_\delta/2$$

et donc

$$\sup_{V_\delta^c(m)} \bar{p}_t^n < p_t(m|y_{1:t})$$

par conséquent

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m)} \bar{p}_t^n < p_t(m|y_{1:t})$$

soit encore

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m) \cap S_n} \bar{p}_t^n < p_t(m|y_{1:t})$$

Comme d'après le lemme 4.2.2,  $\max_{S_n \cap V_\delta(m)} p_t \rightarrow p_t(m|y_{1:t})$  et que d'après le théorème 4.2.1,  $\sup |p_t - \bar{p}_t^n| \rightarrow 0$ , on en déduit

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m) \cap S_n} \bar{p}_t^n < \limsup_{n \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta(m) \cap S_n} \bar{p}_t^n$$

Comme ceci est vrai pour tout  $\delta > 0$  on en déduit le résultat.

## 4.2.2 Estimation du mode par le filtre à convolution avec ré-échantillonnage

La situation est plus délicate pour le filtre avec ré-échantillonnage. Il n'est pas possible d'appliquer le même raisonnement que pour les filtres à convolution

simple, considérés précédemment, puisque l'estimation du filtre optimal ne s'exprime pas comme le quotient d'une densité conjointe et d'une densité marginale. Elle est de la forme suivante

$$\hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{x}_t^i - x_t) K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

avec les couples  $\{(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_t^i)\}_{i=1, \dots, n}$  obtenus en appliquant le système dynamique à des états  $\{\tilde{x}_{t-1}^i\}_{i=1, \dots, n}$  générés suivant  $\hat{p}_{t-1}^n(x_t|y_{1:t})$ .

Pour simplifier l'étude théorique, nous ne prenons pas comme estimateur du mode, la valeur  $x_t$  maximisant  $\hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t})$  mais, nous le calculons à partir de l'étape suivante dans l'algorithme de filtrage. Plus précisément, pour estimer le filtre optimal à l'instant  $t + 1$ , on génère tout d'abord  $n$  états  $\{\tilde{x}_t^i\}_{i=1, \dots, n}$  suivant  $\hat{p}_t^n(x_t|y_{1:t})$ . Ces états intermédiaires,  $\tilde{x}_t^i$  sont utilisés comme éléments de base pour estimer le mode. Par nécessité théorique, on suppose en générer un nombre  $n_m$  pouvant être différent de  $n$ . Ainsi on considère une nouvelle approximation du filtre optimal

$$\bar{p}_t^{n, n_m}(x_t|y_{1:t}) = \frac{1}{n_m} \sum_{i=1}^{n_m} \bar{K}_{\tilde{h}}(\tilde{x}_t^i - x_t) \quad (4.8)$$

Où  $\bar{K}$  est un noyau éventuellement différent de  $K$ , le noyau utilisé pour construire le filtre. L'estimateur du mode est ainsi défini par rapport à l'approximation (4.8) :

$$\hat{m}_{n, n_m} \in \operatorname{argmax}_{x_t} \bar{p}_t^{n, n_m}(x_t|y_{1:t}). \quad (4.9)$$

La consistance asymptotique de  $\hat{m}_{n, n_m}$  est assurée par le théorème qui suit.

**Théorème 4.2.3** *Si le noyau  $K$ , utilisé pour le filtrage, est de Parzen-Rosenblatt positif et borné, si  $p(y_t|y_{1:t-1}) > 0$  et si  $p(y_t|y_{1:t-1})$  est continue en  $y_t$  pour tout  $t$ , si le noyau  $\bar{K}$ , utilisé pour estimer le mode, est une densité bornée, si de plus*

- $\sup_x \|x\|^d \bar{K}(x) < \infty$
- *Il existe  $C > 0$ , tel que  $\sup_x |\bar{K}(x+y) - \bar{K}(x)| \leq C\|y\|$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$*
- *Pour tout  $n$ ,  $p_t^n(x_t|y_{1:t})$  est uniformément continue et vérifie  $\int \|x_t\|^\gamma p_t^n(x_t|y_{1:t}) dx_t < \infty$  pour certains  $\gamma > 0$*

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{q+d}}{\log n} &= \infty \\ \lim_{n_m \rightarrow \infty} \bar{h}_{n_m} &= 0 \\ \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{n_m \bar{h}_{n_m}^d}{\log n_m} &= \infty \end{aligned} \quad \implies \quad \lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \hat{m}_{n, n_m} = m \quad ps$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \sup_{x_t} |\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t|y_{1:t})| &\leq \sup_{x_t \in V} |\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t}) - \mathbb{E}[\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t})]| + \\ &\sup_{x_t} |\mathbb{E}[\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t})] - \bar{K}_h * p_t(x_t|y_{1:t})| \\ &+ \sup_{x_t} |\bar{K}_h * p_t(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t|y_{1:t})| \end{aligned}$$

Le lemme de Bochner (A.1.1) assure que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_{x_t} |\bar{K}_h * p_t(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t|y_{1:t})| = 0$$

Pour tout  $n$  fixé, d'après le corollaire A.1.3.1, on a aussi

$$\lim_{n_m \rightarrow \infty} \sup_{x_t} |\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t}) - \mathbb{E}[\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t})]| = 0 \quad ps$$

Etudions le cas du troisième terme :

$$\begin{aligned} |\mathbb{E}[\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t})] - \bar{K}_h * p_t(x_t|y_{1:t})| &= \left| \int \bar{K}_h(x_t - u) \hat{p}_t^n(u|y_{1:t}) du \right. \\ &\quad \left. - \int \bar{K}_h(x_t - u) p_t(u|y_{1:t}) du \right| \\ &\leq \int \bar{K}_h(x_t - u) |\hat{p}_t^n(u|y_{1:t}) \\ &\quad - p_t(u|y_{1:t})| du \\ &\leq \int \bar{K}(u) |\hat{p}_t^n(u - \bar{h} x_t|y_{1:t}) \\ &\quad - p_t(u - \bar{h} x_t|y_{1:t})| du \\ &\leq \max \bar{K} \|\hat{p}_t^n - p_t\|_{L_1} \end{aligned}$$

Or d'après le théorème 3.5.2, on a  $\|\hat{p}_t^n - p_t\|_{L_1} \rightarrow 0$  presque sûrement lorsque  $n \rightarrow \infty$ . On en déduit

$$\lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \sup_{x_t} |\bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t}) - p_t(x_t|y_{1:t})| = 0 \quad ps$$

d'où le résultat.

De même que pour les filtres à convolution simple, il est possible de considérer un estimateur du mode ne faisant pas intervenir de procédure d'optimisation, comme celui proposé par Abraham & al. ([1], [2]). Soit  $\tilde{m}_{n,n_m}$  un tel estimateur :

$$\tilde{m}_{n,n_m} = \arg \max_{x_t \in S_{n_m}} \bar{p}_t^{n,n_m}(x_t|y_{1:t}). \quad (4.10)$$

avec  $S_{n_m} = \{\bar{x}_{t-1}^i\}_{i=1,\dots,n_m}$ .

**Théorème 4.2.4** *Sous les hypothèses du théorème 4.2.3, si de plus,  $p_t(x_t|y_{1:t})$  vérifie  $A(\epsilon) \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{q+d}}{\log n} &= \infty \\ \lim_{n_m \rightarrow \infty} \bar{h}_{n_m} &= 0 \\ \lim_{n_m \rightarrow \infty} \frac{n_m \bar{h}_{n_m}^d}{\log n_m} &= \infty \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \tilde{m}_{n, n_m} = m \quad ps$$

**Démonstration :** La preuve, proche de celle du théorème 4.2.2, s'inspire de Abraham & al. ([1]) et Romano ([114]).

Pour tout  $\delta > 0$ , d'après le lemme 4.2.1,  $\sup_{V_\delta^c(m)} p_t < p_t(m|y_{1:t})$ . Soit  $\varepsilon_\delta = p_t(m|y_{1:t}) - \sup_{V_\delta^c(m)} p_t$ , comme d'après le théorème 4.2.3, on a  $\sup |p_t - \bar{p}_t^{n, n_m}| \rightarrow 0$  lorsque  $n$  et  $n_m$  tendent vers l'infini, il existe  $N(\varepsilon_\delta)$  tel que pour tout  $n > N(\varepsilon_\delta)$  et  $N_m(\varepsilon_\delta, n)$  tel que pour tout  $n_m > N_m(\varepsilon_\delta, n)$  on a

$$\sup_{V_\delta^c(m)} |p_t - \bar{p}_t^{n, n_m}| < \varepsilon_\delta/2$$

et donc

$$\sup_{V_\delta^c(m)} \bar{p}_t^{n, n_m} < p_t(m|y_{1:t})$$

par conséquent

$$\lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m)} \bar{p}_t^{n, n_m} < p_t(m|y_{1:t})$$

soit encore

$$\lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m) \cap S_n} \bar{p}_t^{n, n_m} < p_t(m|y_{1:t})$$

Comme d'après le lemme 4.2.2,  $\max_{S_{n_m} \cap V_\delta(m)} p_t \rightarrow p_t(m|y_{1:t})$  et que d'après le théorème 4.2.3,  $\sup |p_t - \bar{p}_t^{n, n_m}| \rightarrow 0$ , on en déduit

$$\lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta^c(m) \cap S_{n_m}} \bar{p}_t^{n, n_m} < \lim_{n, n_m \rightarrow \infty} \sup_{V_\delta(m) \cap S_{n_m}} \bar{p}_t^{n, n_m}$$

Comme c'est vrai pour tout  $\delta > 0$ , on en déduit le résultat.

### 4.3 Conclusion du quatrième chapitre

Ce chapitre propose deux alternatives pour estimer la valeur de l'état du système dynamique, l'espérance et le mode de la densité du filtre optimal. En général, l'espérance est préférée au mode car elle a la propriété de minimiser l'erreur

quadratique, cependant comme nous l'avons précédemment évoqué, le mode est intéressant pour des densités multimodales avec un mode prédominant.

Les estimateurs de l'espérance et du mode sont bâtis à partir d'estimations de la densité du filtre optimal présentées dans le troisième chapitre. L'estimation du mode, par le biais des noyaux de convolution, requiert souvent beaucoup plus de temps de calcul que l'estimation de l'espérance, ce qui est très dissuasif pour du filtrage en ligne. Ce problème, d'ordre pratique, a pu être contourné, grâce à l'emploi d'une technique d'estimation rapide et efficace, inspirée des travaux d'Abraham & al. ([1],[2]).

Finalement, nous avons établi, dans ce chapitre, deux techniques d'estimation de l'état d'un système dynamique à base de noyaux de convolution. Ces deux approches ont l'avantage d'être utilisables en ligne tout en étant consistantes.

Ces estimations découlent toutes deux, de la densité estimée du filtre optimal. Plus généralement, il est possible d'utiliser cette densité estimée pour bâtir des estimateurs de l'état d'autres natures, tels que des intervalles de confiance ou des quantiles. L'étude des propriétés théoriques de tels estimateurs reste à réaliser, mais elle semble toutefois accessible, au vu des résultats du troisième chapitre et des nombreux travaux, dans la littérature, relatifs aux estimateurs non paramétriques.



# Chapitre 5

## Estimation conjointe états-paramètres d'un système dynamique

Les paramètres d'un système dynamique et en particulier d'un modèle de bio-procédé sont souvent très mal connus, sinon totalement inconnus. D'un point de vue pratique il est donc très pertinent en filtrage de chercher à prendre en compte cette méconnaissance, et d'estimer simultanément les états et les paramètres inconnus.

Le système dynamique plus général, ci-dessous, nous place dans un tel contexte :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t &= h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases} \quad (5.1)$$

Dans la suite,  $\theta = (\theta_x, \theta_y) \in \mathbb{R}^p$  désigne l'ensemble des paramètres inconnus. La nature statistique des bruits aléatoires  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  est supposée totalement connue. Cependant si les variances des bruits sont inconnues, il suffit de supposer qu'ils sont réduits et de mettre leurs écarts-types en paramètres.

L'estimation de paramètres de systèmes dynamiques est une tâche souvent difficile, car les données sont dépendantes. Dans le contexte du filtrage, c'est encore plus difficile puisque seulement une partie des données, les  $y_1, \dots, y_t$  sont disponibles.

## 5.1 Approche empirique

Il est parfois possible, pour certains paramètres, de proposer des fonctions de coût à minimiser. C'est par exemple le cas, quand le bruit est additif sur le modèle d'observation et que les paramètres inconnus sont uniquement dans le modèle d'état :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t, \theta, \varepsilon) \\ y_t &= h_t(x_t) + \eta_t \end{cases} \quad (5.2)$$

Pour un tel système, la fonction coût définie par l'expression

$$C(\theta) = \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ y_t - h_t(\hat{x}_t(\theta)) \right]^2 - \sigma_\eta^2 \right)^2$$

avec  $\hat{x}_t(\theta)$  un estimateur de  $\mathbb{E}[x_t | y_{1:t}, \theta]$ , est naturelle. En effet, si  $x_t$  remplace  $\hat{x}_t(\theta)$ , par la loi forte des grands nombres on a que  $C \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Comme il est raisonnable de supposer que  $\hat{x}_t(\theta)$  est d'autant plus proche de  $x_t$  que  $\theta$  est proche de sa vraie valeur, il semble donc pertinent de minimiser  $C(\theta)$ .

En pratique, pour notre approche, la minimisation de  $C(\theta)$  n'est pas évidente car  $\hat{x}_t(\theta)$  est aléatoire, puisque dépendant des particules générées. Il faut donc avoir recours à des procédures de minimisation spéciales, très lourdes en terme de temps de calcul et qui visent la minimisation de  $\mathbb{E}[C(\theta)]$ . De plus, théoriquement, il est très difficile, voire impossible, d'étudier l'erreur commise en minimisant cette fonction, sa justification n'étant qu'empirique.

Nous préférons donc proposer une adaptation des estimateurs statistiques classiques à nos filtres, plutôt que de chercher des fonctions de coût originales et d'étudier leurs propriétés.

Cependant, les résultats de la minimisation de  $C(\theta)$  sur quelques exemples sont donnés, à titre indicatif, dans le chapitre portant sur les applications.

Le problème théorique de la minimisation de  $C(\theta)$  est essentiellement dû au terme  $\hat{x}_t(\theta)$ . En effet, les propriétés statistiques de  $\hat{x}_t(\theta)$  sont inconnues et il en serait de même si on le remplaçait par  $\mathbb{E}[x_t | y_{1:t}, \theta]$ . Un moyen simple pour éluder cet obstacle est d'utiliser uniquement les  $y_1, \dots, y_t$  observés pour estimer les paramètres. Toutes les méthodes proposées par la suite sont basées sur ce principe.

En premier lieu les estimateurs usuels en statistique sont considérés : les moindres carrés et le maximum de vraisemblance. Le calcul de ces deux estimateurs fait appel à une étape de minimisation ou maximisation, cette phase est assez problématique pour nos filtres. En effet, comme il a été évoqué précédemment

certaines quantités considérées dans les deux cas sont aléatoires. Après une discussion autour de ce problème, est proposée une autre méthode d'estimation, dans l'esprit de Monte Carlo, évitant cette phase d'optimisation.

## 5.2 Estimateurs des Moindres Carrés conditionnels

L'estimateur des moindres carrés usuel n'est pas ici applicable puisque seuls les  $y_t$  sont à disposition et ils sont, de plus, dépendants. Considérons donc un estimateur des moindres carrés conditionnel, introduit pour traiter les séries chronologiques (Tong [124]).

### 5.2.1 Estimateur théorique

Cette généralisation des moindres carrés, permet dans le cas de variables dépendantes, d'estimer des paramètres inconnus de leur distribution. Ces résultats présentés par Tong([124]) sont issus des travaux de Klimko et Nelson ([90]). Leur caractère général leur donne un grand intérêt, mais le calcul pratique de cet estimateur est souvent mal aisé.

Soit le processus stochastique  $y_t$ ,  $t = 1, 2, \dots$ , défini sur un espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta)$ , dont la distribution dépend du vecteur  $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_p)$  appartenant à un ouvert d'un espace euclidien. Dans la suite, la vraie valeur des paramètres est notée  $\theta_0$ . Soit  $F_t$  la tribu engendrée par  $y_1, \dots, y_t$ ,

$$\begin{aligned} g(\theta, F_t) &= \mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t] \\ &\text{et} \\ u_t(\theta) &= y_t - g(\theta, F_{t-1}). \end{aligned}$$

Le processus  $\{u_t(\theta_0)\}$  introduit ci-dessus, est une différence de martingales, les propriétés de ces objets sont étudiées en détail par Stout ([123]).

Etant donnés  $y_1, \dots, y_T$ , pour estimer  $\theta$  selon ce critère, il faut minimiser la somme des carrés conditionnels définie par

$$Q_T(\theta) = \sum_{t=1}^{T-1} (y_{t+1} - g(\theta, F_t))^2$$

L'estimateur  $\theta_T$  de  $\theta_0$ , est donc solution du système d'équations

$$\frac{\partial Q_T(\theta)}{\partial \theta_i} = 0 \quad i = 1, \dots, p.$$

La démonstration de la convergence de  $\theta_T$  vers  $\theta_0$  repose sur le contrôle du développement de Taylor à l'ordre 2 de  $Q_T$ . Il faut donc supposer que  $\mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t]$  est deux fois différentiable par rapport à chacun des paramètres  $(\theta_1, \dots, \theta_p)$ . Les hypothèses du théorème étant faites sur des éléments du développement de Taylor, nous allons d'abord l'expliciter. Il existe un  $\theta_*$ , vérifiant  $\|\theta_0 - \theta_*\| \leq \|\theta_0 - \theta\|$  tel que :

$$\begin{aligned} Q_T(\theta) &= Q_T(\theta_0) + (\theta - \theta_0)' \frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)' \frac{\partial^2 Q_T(\theta_*)}{\partial \theta^2} (\theta - \theta_0) \\ &= Q_T(\theta_0) + (\theta - \theta_0)' \frac{\partial Q_T(\theta_0)}{\partial \theta} + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)' V_T (\theta - \theta_0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\theta - \theta_0)' R_T(\theta_*) (\theta - \theta_0) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} V_T &= \frac{\partial^2 Q_T(\theta_0)}{\partial \theta^2} \\ R_T(\theta_*) &= \frac{\partial^2 Q_T(\theta_*)}{\partial \theta^2} - V_T. \end{aligned}$$

L'hypothèse fondamentale du théorème est

$$\frac{2}{T} V_T \rightarrow V \quad ps \quad (5.3)$$

où  $V$  est une matrice constante définie positive. Cependant, la fonction  $Q_T$  considérée ici, donne plus d'information sur cette hypothèse. En remarquant que

$$\frac{1}{2} V_T = \left[ \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\partial g(\theta, F_t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g(\theta, F_t)}{\partial \theta_j} \right]_{ij} - \left[ \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\partial^2 g(\theta, F_t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} u_{t+1}(\theta_0) \right]_{i,j}$$

l'ajout d'une hypothèse d'intégrabilité, entraîne par la loi forte pour les martingales ([123])

$$\frac{1}{T} \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\partial^2 g(\theta, F_t)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} u_{t+1}(\theta_0) \rightarrow 0 \quad ps.$$

Il reste alors seulement à montrer, pour satisfaire l'hypothèse 5.3, que

$$\frac{1}{T} \left[ \sum_{t=1}^{T-1} \frac{\partial g(\theta, F_t)}{\partial \theta_i} \frac{\partial g(\theta, F_t)}{\partial \theta_j} \right] \rightarrow V \quad ps.$$

A présent que les notations sont précisées, énonçons le théorème de Klimko et Nelson ([90]) :

**Théorème 5.2.1** *Supposons que*

- (i)  $\lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{\delta \rightarrow 0} (R_T(\theta_*)_{ij}/n\delta) < \infty$  ps, avec  $i, j \leq p$
- (ii) 5.3 est vérifiée
- (iii)  $T^{-1} \partial Q_T(\theta_0)/\partial \theta_i \rightarrow 0$ , ps avec  $i \leq p$

Soient  $\varepsilon > 0$ ,  $\delta > 0$  donnés et  $N_\delta$  la sphère centrée en  $\theta_0$  de rayon  $\delta$ . Alors pour certains  $\delta^*$ ,  $0 < \delta^* < \delta$ , il existe un événement  $E$  avec  $P(E) > 1 - \varepsilon$  et un entier  $T_0$  tels que, pour tout  $T > T_0$ ,  $Q_T$  atteint un minimum relatif en  $\theta_T \in N_{\delta^*}$

La démonstration s'appuie sur le théorème d'Egorov (voir [91]) et utilise les hypothèses pour majorer les termes du développement de Taylor. Elle est détaillée dans ([124]) et ([90]). Toutefois, il est important de noter qu'elle reste valable pour toute fonction  $Q_T$  vérifiant les hypothèses (i)-(iii).

**Corollaire 5.2.1.1** *Sous les hypothèses du théorème précédent, il existe une suite d'estimateurs  $\theta_T \rightarrow \theta_0$  ps, et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe un événement  $E$  avec  $P(E) > 1 - \varepsilon$  et un  $T_0$  tels que sur  $E$  pour  $T > T_0$ ,  $Q_T$  atteigne un minimum relatif en  $\theta_T$*

Des résultats de vitesse de convergences et de normalité asymptotiques sont aussi donnés dans ([90]) sous l'ajout d'autres hypothèses.

Cet estimateur est intéressant, mais en général, et surtout dans notre contexte, la quantité  $g(\theta, F_t) = \mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t]$  est inconnue. Il faut donc se contenter de l'estimer. Or, les noyaux de convolution appliqués sur les trajectoires simulées suivant le système nous permettent de construire un estimateur. L'étude de l'impact sur  $\theta_T$  de la substitution de  $\mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t]$  par un estimateur, lors d'un calcul pratique, est réalisée dans la section suivante.

## 5.2.2 L'estimateur en pratique

Dans le contexte du filtrage, la quantité  $\mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t]$  n'est pas accessible ; il faut alors la remplacer par un estimateur noté  $m_{t+1,n}(\theta)$ . Dans un premier temps, nous précisons la forme de  $m_{t+1,n}(\theta)$  pour notre approche par noyaux de convolution. Le  $n$ , différent du temps, représente l'asymptotique de l'estimateur. Dans notre cas,  $n$  correspond au nombre de trajectoires simulées. Dans un deuxième temps, nous étudions l'effet de cette substitution sur le plan théorique.

### Construction de l'estimateur

Rappelons tout d'abord la forme du système de notre cadre de travail

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t &= h_t(x_t, \theta_y, \eta_t). \end{cases} \quad (5.4)$$

Soit un instant  $t + 1$  fixé. Supposons que les paramètres  $\theta$  sont connus, les observations  $(y_1, \dots, y_{t+1})$  suivent alors une loi  $\nu_{t+1}$ . Si la densité de  $y_{1:t}$  est notée  $g_t$  et  $\psi_{t+1}(y_{1:t}) = \int y_{t+1} d\nu_{t+1}(y_{1:t}, y_{t+1})$  alors

$$\mathbb{E}[y_{t+1}|y_1, \dots, y_t] = \frac{\psi_{t+1}(y_1, \dots, y_t)}{g_t(y_1, \dots, y_t)}$$

Mais les deux fonctions  $g_t$  et  $\psi_{t+1}$  dépendent des paramètres  $\theta$ . Cette dépendance est prise en compte au travers des notations  $\psi_{\theta,t+1}$  et  $g_{\theta,t}$ . La quantité à estimer peut alors s'écrire sous la forme :

$$\mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|y_1, \dots, y_t] = \frac{\psi_{\theta,t+1}(y_1, \dots, y_t)}{g_{\theta,t}(y_1, \dots, y_t)}$$

Il suffit de construire des estimateurs de  $\psi_{\theta,t+1}$  et  $g_{\theta,t}$ . Or les fonctions  $f_t, h_t$  et la distribution de l'état initial  $x_0$  sont connues. Donc pour un  $\theta$  donné, il est possible de générer  $n$  trajectoires  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_t^i)$  où  $t \in \mathbb{N}^*$  et  $i = 1, \dots, n$  suivant le système 5.4. Et pour tout  $i = 1, \dots, n$ ,  $(\tilde{y}_{1,i}, \dots, \tilde{y}_{t+1,i}) \sim \nu_{\theta,t+1}$ . L'estimateur de  $\mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|y_1, \dots, y_t]$ ,  $m_{t+1,n}(\theta)$ , construit à partir de ces trajectoires est défini par

$$\begin{aligned} m_{t+1,n}(\theta) &= \frac{\psi_{n,\theta,t+1}(y_{1:t})}{g_{n,\theta,t}(y_{1:t})} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t}) \tilde{y}_{t+1}^i}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t})} \end{aligned}$$

où  $\psi_{n,\theta,t+1}$  et  $g_{n,\theta,t}$  sont respectivement les estimateurs de  $\psi_{\theta,t}$  et  $g_{\theta,t}$  construits avec le noyau de convolution  $K$  et l'estimateur empirique de  $\nu_{\theta,t}$ ,  $\nu_{n,\theta,t} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{y}_{1:t}^i}$ .

L'estimation de la fonction  $Q_T$  est ainsi définie par

$$\widehat{Q}_{T,n}(\theta) = \sum_{t=1}^T (y_t - m_{t,n}(\theta))^2$$

et l'estimateur des moindres carrés associé est

$$\widehat{\theta}_{T,n} = \arg \min_{\theta} \widehat{Q}_{T,n}(\theta)$$

### Etude de ses propriétés théoriques

Pour obtenir des résultats de convergence, il est nécessaire d'introduire une hypothèse de type convergence uniforme sur  $\theta$  de  $\widehat{Q}_{T,n}$  vers  $Q_T$ , car on a besoin de la convergence des "argmin". On sera confronté au même type de problème pour le maximum de vraisemblance.

Comme on utilise un nombre fini d'estimateurs  $m_{1,n}(\theta), \dots, m_{T,n}(\theta)$  pour construire  $\widehat{Q}_{T,n}$ , il suffit donc d'imposer la contrainte à ces derniers.

L'approche la plus simple consiste à introduire l'hypothèse

$$\mathcal{H} : \forall t \in \mathbb{N}, m_{t,n}(\theta) \text{ converge uniformément en } \theta \text{ vers } \mathbb{E}_\theta[y_{t+1}|F_t] \quad ps$$

**Théorème 5.2.2** *Sous  $\mathcal{H}$  et sous les hypothèses du théorème 5.2.1*

*Il existe une suite d'estimateurs  $\widehat{\theta}_{T,n} \rightarrow \theta_0$  ps, lorsque  $T$  et  $n$  tendent vers l'infini, et pour  $\varepsilon > 0$ , il existe un événement  $E$  avec  $P(E) > 1 - \varepsilon$  et un  $T_0$  tels que sur  $E$  pour  $T > T_0$ ,  $\widehat{Q}_{T,n}$  atteint un minimum en  $\widehat{\theta}_{T,n}$ .*

**Démonstration :** D'après le théorème 5.2.1, on sait que le résultat est vrai pour la suite d'estimateur  $\theta_T$ , minimiseurs de  $Q_T$ . Comme pour tout  $T$  fixé,  $Q_{T,n}$  dépend d'un nombre fini d'estimateurs  $m_{t,n}(\theta)$  uniformément convergents,  $Q_{T,n}$  converge uniformément vers  $Q_T$ . Et donc  $\theta_{T,n}$  converge vers  $\theta_T$  ps.

Cette hypothèse  $\mathcal{H}$  est difficile à vérifier en pratique puisqu'elle dépend essentiellement du système dynamique considéré et du rôle tenu par le paramètre. Il est aussi possible, d'utiliser une hypothèse moins forte basée sur des propriétés d'épi-convergence. La propriété d'épi-convergence pour une suite de fonctions, garantit la convergence des *argmin* vers l'argmin de la fonction limite. Nous donnons ici uniquement les éléments utiles à notre problématique ; pour plus de détail sur ces notions, on peut se référer par exemple à Rockafellar & Wets([113] ou à Dal Maso ([27]).

**Définition 5.2.1** *Soit une suite de fonction  $f_n$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$ . S'il existe une fonction  $f$  telle que pour tout  $x \in E$ ,*

$$\sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{V}_x} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathcal{O}} f_n(y) = \sup_{\mathcal{O} \in \mathcal{V}_x} \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_{y \in \mathcal{O}} f_n(y) = f(x)$$

*avec  $\mathcal{V}_x$  ensemble des voisinages ouverts de  $x$  dans  $E$ , alors on dit que la suite  $f_n$  est épi-convergente vers  $f$*

Le théorème suivant précise la propriété des suites épi-convergentes qui nous intéresse.

**Théorème 5.2.3 ( Corollaire 7.20 dans Dal Maso ([27])** Soient une suite  $f_n$  épi-convergente vers  $f$  et  $x_n$  un minimiseur de  $f_n$ . Si  $x^*$  est un point d'accumulation de  $(x_n)$  alors  $x^*$  est un minimiseur de  $f$  et

$$f(x^*) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n).$$

Si  $(x_n)$  converge vers  $x^*$ , alors  $x^*$  est un minimiseur de  $f$  et

$$f(x^*) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n).$$

Comme, dans notre contexte, les estimations sont ponctuellement convergentes sous certaines conditions, le résultat du théorème 5.2.4 ci-dessous est intéressant.

**Définition 5.2.2** Une suite de fonction  $f_n$  d'un espace métrique  $(E, d)$  dans  $\bar{\mathbb{R}}$  est dite équi-continue si pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe un  $\eta > 0$  et un  $N$  tel que pour tout  $n > N$ , tout couple  $(x, y)$  vérifiant  $d(x, y) < \eta$  on a  $|f_n(x) - f_n(y)| < \epsilon$

**Théorème 5.2.4 ( Proposition 5.9 dans Dal Maso ([27])** Si une suite  $f_n$  est équi-continue sur  $E$ , alors les deux propositions suivantes sont équivalentes :

- (i)  $f_n$  est épi-convergente vers  $f$
- (ii)  $f_n$  convergence ponctuellement vers  $f$

Ainsi on peut remplacer l'hypothèse  $\mathcal{H}$  par la suivante

$$\mathcal{H}' : \forall t \in \mathbb{N}, m_{t,n}(\theta) \text{ est équi-continue en } \theta$$

**Théorème 5.2.5** Sous  $\mathcal{H}'$  et sous les hypothèses du théorème 5.2.1, si

- les observations  $y_t$  sont contenues dans un compact  $G$ .

- le noyau  $K$  est positif lipschitsien.

-  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh^{td} / \log n = \infty$ .

Il existe une suite d'estimateurs  $\hat{\theta}_{T,n} \rightarrow \theta_0$  ps lorsque  $T$  et  $n$  tendent vers l'infini, et pour  $\epsilon > 0$ , il existe un événement  $E$  avec  $P(E) > 1 - \epsilon$  et un  $T_0$  tels que sur  $E$  pour  $T > T_0$ ,  $\hat{Q}_{T,n}$  atteint un minimum en  $\hat{\theta}_{T,n}$ .

**Démonstration :** D'après les théorèmes énoncés au chapitre 4, si les  $y_1, \dots, y_t$  sont contenus dans un compact  $G$  et le noyau  $K$  est positif lipschitsien, alors les conditions  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh^{td} / \log n = \infty$  entraînent la convergence

presque sûre de  $m_{k+1,n}(\theta)$  vers  $\mathbb{E}_\theta[y_{k+1}|y_1, \dots, y_t]$  sur  $G$  pour tout  $k \leq t$  et pour tout  $\theta$ . Donc à  $T$  fixé,  $\hat{Q}_{T,n}$  convergence presque sûrement vers  $Q_T$ , pour tout  $\theta$ . Ainsi, d'après l'hypothèse  $\mathcal{H}'$  et le théorème 5.2.4, on a que  $\hat{Q}_{T,n}$  est épi-convergente presque sûrement vers  $Q_T$ . Le théorème 5.2.1 permet de déduire le résultat.

### 5.3 Maximum de vraisemblance

Pour faciliter la lecture, rappelons la forme générale du système au coeur de notre étude :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t &= h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases}$$

où les fonctions  $f_t, h_t$  et la nature statistique des bruits sont connues.

L'idée de maximiser la vraisemblance de  $\theta = (\theta_x, \theta_y) \in \mathbb{R}^p$  est naturelle, elle est donc apparue très tôt. Kitagawa([87],[88]) notamment a proposé une estimation de la vraisemblance. Bien entendu, la vraisemblance n'est pas généralement calculable, il faut alors avoir recours à des estimations. Or les approches de type Monte Carlo fournissent des estimations aléatoires. La maximisation est ainsi très lourde en terme de temps de calcul. Doucet([55]) a récemment étudié la question. Il propose deux méthodes de maximisation de type gradient. Les résultats obtenus sur différents exemples sont encourageants malgré quelques problèmes de variabilité du gradient.

Les estimateurs de la vraisemblance, présentés dans cette partie, sont construits à partir de nos filtres par convolution. Le problème de la maximisation est discuté dans la section suivante.

La vraisemblance des observations  $\theta$  est par définition :

$$\begin{aligned} L(\theta) &= p(y_1, \dots, y_t | \theta) \\ &= p(y_1 | \theta) \prod_{i=2}^t p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta). \end{aligned}$$

Suivant le filtre à noyau de convolution utilisé, l'estimateur de la vraisemblance varie. Les différents cas sont détaillés dans les sections suivantes.

### Estimation du maximum de vraisemblance pour un filtre à mémoire complète

Le cas du filtre à mémoire complète est très simple ; il n'est pas utile de décomposer la vraisemblance en produit de densités conditionnelles puisqu'une estimation immédiate est disponible :

$$\begin{aligned}\widehat{L}_n(\theta) &= p^n(y_1, \dots, y_t | \theta) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t}^i)\end{aligned}$$

Ainsi comme estimateur du maximum de vraisemblance on prend

$$\hat{\theta}_n = \arg \max_{\theta} \widehat{L}_n(\theta)$$

### Estimation du maximum de vraisemblance pour un filtre à mémoire tronquée

Dans cette partie, on suppose que le filtre optimal ne requiert pas toute la mémoire (cf. §3.3). Concrètement, il est suffisant de connaître les  $T$  dernières observations :  $p(x_t | y_1, \dots, y_t) = p(x_t | y_{t-T}, \dots, y_t)$ .

Lorsque la mémoire est tronquée, il est nécessaire de passer par la décomposition en produit de densités conditionnelles. Plus précisément :

$$\begin{aligned}L(\theta) &= \prod_{i=1}^t p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta) \\ &= \prod_{i=1}^T p(y_i | y_1, \dots, y_{i-1}, \theta) \prod_{i=T+1}^t p(y_i | y_{i-T}, \dots, y_{i-1}, \theta) \\ &= p(y_1, \dots, y_T | \theta) \prod_{i=T+1}^t p(y_i | y_{i-T}, \dots, y_{i-1}, \theta)\end{aligned}$$

L'estimateur s'obtient naturellement en substituant, aux densités, leurs estimations :

$$\begin{aligned}\widehat{L}_{n,T}(\theta) &= p^n(y_1, \dots, y_T | \theta) \prod_{i=T+1}^t p_T^n(y_i | y_{i-T}, \dots, y_{i-1}, \theta) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{1:T}^i - y_{1:T}^i) \prod_{i=T+1}^t \frac{\sum_{j=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{i-T:i}^j - y_{i-T:i}^j)}{\sum_{j=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_{i-T:i-1}^j - y_{i-T:i-1}^j)}\end{aligned}$$

Ainsi comme estimateur du maximum de vraisemblance on prend

$$\hat{\theta}_{n,T} = \arg \max_{\theta} \hat{L}_{n,T}(\theta)$$

### Estimation du maximum de vraisemblance pour un filtre avec sélection

La situation est plus complexe à formaliser pour le filtre avec sélection. Dans ce cas il est nécessaire d'introduire des  $\bar{y}_t^i$  intermédiaires dans l'algorithme de génération. Il faut procéder de la manière suivante :

- Au temps  $t > 1$ .
- Soient  $\tilde{x}_{t-1}^i$ , où  $i = 1, \dots, n$  des réalisations de  $p(x_{t-1} | B_\epsilon(y_{1:t-1}))$ .
- Par évolution des  $n$  réalisations suivant le système dynamique sans sélection on obtient  $(\bar{x}_t^i, \bar{y}_t^i)$ , où  $i = 1, \dots, n$ .
- Ainsi les  $\bar{y}_t^i$ , avec  $i = 1, \dots, n$  sont des réalisations de  $p(y_t | B_\epsilon(y_{1:t-1}))$ .

On peut alors construire un estimateur de la vraisemblance par convolution des  $\bar{y}_t^i$  :

$$\begin{aligned} \hat{L}_{n,\epsilon}(\theta) &= \prod_{i=1}^t p^n(y_i | B_\epsilon(y_{1:i-1})). \\ &= \prod_{i=1}^t \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{h_n}(\bar{y}_i^j - y_i) \end{aligned}$$

Mais les variables ainsi simulées  $(\bar{x}_t^i, \bar{y}_t^i)$ , ne sont pas utilisables pour continuer le filtrage. Il faut simuler des  $(\tilde{x}_t^i, \tilde{y}_t^i)$ , telles que  $\tilde{y}_t^i \in \mathcal{B}_\epsilon(y_{1:t})$ .

L'estimateur du maximum de vraisemblance est alors

$$\hat{\theta}_{n,\epsilon} = \arg \max_{\theta} \hat{L}_{n,\epsilon}(\theta)$$

### Estimation du maximum de vraisemblance pour un filtre avec ré-échantillonnage

Comme pour le cas précédent, la formalisation n'est pas immédiate. Mais il n'est pas nécessaire, dans ce cas, d'introduire des variables intermédiaires. Toutes

les quantités nécessaires au calcul de l'estimateur sont calculées au cours de l'algorithme de filtrage par noyau avec ré-échantillonnage. En effet, plaçons-nous à un instant  $t$  fixé :

- Soit  $p^n(x_t|y_1, \dots, y_t)$  l'estimation du filtre optimal fournie par l'algorithme.
- Génération des  $\bar{x}_t^i$ , pour  $i = 1, \dots, n$  suivant  $p^n(x_t|y_1, \dots, y_t)$ .
- Evolution des  $\bar{x}_t^i$  suivant le système dynamique pour obtenir  $(\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$  où  $i = 1, \dots, n$ .
- Ainsi les  $\tilde{y}_{t+1}^i$ , avec  $i = 1, \dots, n$  sont des réalisations de  $p^n(y_{t+1}|y_{1:t})$ .

En appliquant à chaque instant  $t$ , un noyau de convolution aux  $\tilde{y}_{t+1}^i$ , on obtient l'estimation de la vraisemblance suivante :

$$\hat{L}_n^r(\theta) = \prod_{i=1}^t \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_i^j - y_i)$$

On prend donc comme estimateur du maximum de vraisemblance  $\hat{\theta}_n^r$  défini comme suit :

$$\hat{\theta}_n^r = \arg \max_{\theta} \hat{L}_n^r(\theta)$$

## Propriétés théoriques des estimateurs

Pour montrer la convergence de ces différents estimateurs de  $\theta$  :  $\hat{\theta}_n, \hat{\theta}_{n,T}, \hat{\theta}_{n,\epsilon}$  ou  $\hat{\theta}_n^r$ , il est nécessaire d'introduire, comme pour l'estimateur des moindres carrés conditionnel, une hypothèse de type convergence uniforme en  $\theta$ , de l'approximation de la vraisemblance. Ainsi chacun des estimateurs considérés converge vers le maximum de la vraisemblance associé aux  $t$  données  $y_1, \dots, y_t$ , lorsque  $n$  tend vers l'infini et le maximum de la vraisemblance converge presque sûrement vers  $\theta$  (sous les hypothèses usuelles) lorsque  $t$  tend vers l'infini.

Ce qui précède peut se résumer par le théorème suivant

**Théorème 5.3.1** *Soit  $\theta_t$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Soit  $\theta_{n,t} = \arg \max L_n(\theta)$ , avec  $L_n$  estimation de la vraisemblance  $L(\theta)$  pour  $y_1, \dots, y_t$ . Si  $L_n$  converge uniformément en  $\theta$  vers  $L$  pour tout  $t$  alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \theta_{n,t} = \theta_t \quad ps$$

**Démonstration :** Par hypothèse, pour tout  $\epsilon > 0$ , pour tout  $t$ , il existe un  $N$  tel que, pour tout  $n > N$ , on ait  $\|\theta_t - \theta_{n,t}\| \leq \epsilon$ .

Cette hypothèse de convergence uniforme est très forte et très difficile à étudier en pratique. Comme dans le cas de l'estimation des moindres carrés conditionnels, pour certains de nos filtres à noyaux de convolution, on peut considérer une hypothèse plus faible d'équi-continuité. Il est possible d'utiliser cette hypothèse plus faible seulement pour les filtres convergeant ponctuellement. Or les résultats de convergence ponctuelle presque sûre ont été établis pour tous les filtres considérés ci-dessus, excepté le filtre avec ré-échantillonnage. Les hypothèses varient légèrement suivant l'estimateur considéré :

**Théorème 5.3.2** *Soit  $\theta_t$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Si  $\widehat{L}_n$  est équi-continue en  $\theta$ , si  $K$  est un noyau de Parzen-Rosenblatt positif et borné, si  $L$  est continue au point  $y_1, \dots, y_t$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{tq}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_n = \theta_t \quad ps$$

**Démonstration :** Comme la vraisemblance correspond à la densité conjointe des  $y_1, \dots, y_t$ ,  $L(\theta) = p(y_1, \dots, y_t | \theta)$ , les hypothèses du théorème 3.2.2 étant vérifiées, on a la convergence ponctuelle presque sûre pour tout  $\theta$  de  $L_n$  vers  $L$ . Ainsi, d'après le théorème 5.2.4, on a que  $L_n$  est épi-convergente vers  $L$ . D'où le résultat.

**Remarque :** Dans ce théorème on suppose implicitement l'existence d'un unique maximum pour la fonction de vraisemblance. Même si ce n'est pas le cas, la propriété d'épi-convergence assure la convergence de  $\hat{\theta}_n$  vers un élément de l'argmax de la vraisemblance.

**Théorème 5.3.3** *Soit  $\theta_t$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Si  $\widehat{L}_{n,T}$  est équi-continue en  $\theta$ , si  $K$  est un noyau de Parzen-Rosenblatt positif et borné, si  $L$  est continue au point  $y_{t-T}, \dots, y_t$  alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{Tq}}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{n,T} = \theta_t \quad ps$$

**Démonstration :** Idem théorème 5.3.2.

**Théorème 5.3.4** Soit  $\theta_t$  l'estimateur du maximum de vraisemblance de  $\theta$ . Si  $\hat{L}_{n,\epsilon}$  est équi-continue en  $\theta$ , si  $K$  est un noyau de Parzen-Rosenblatt positif et borné, si  $L$  est continue au point  $y_1, \dots, y_t$  alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \epsilon_n = 0 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\log \frac{n}{\epsilon_n}} = \infty \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \hat{\theta}_{n,\epsilon_n} = \theta_t \quad ps$$

**Démonstration :** Même raisonnement que pour le théorème 5.3.2, mis à part que l'on s'appuie sur le résultat de convergence ponctuelle du filtre avec sélection établi par le théorème 3.4.5.

## 5.4 Problèmes d'optimisation relatifs à l'estimation de paramètres

L'estimation des moindres carrés et toutes les estimations de la vraisemblance proposées précédemment sont aléatoires conditionnellement aux observations. En effet, pour les calculer avec des observations  $y_{1:t}$  fixées, il est nécessaire de générer des particules, suivant des lois de probabilités dépendantes de la valeur de  $\theta$ . Pour obtenir des estimations classiques des moindres carrés ou du maximum de vraisemblance, il faut donc faire appel à des procédures d'optimisation stochastique pour minimiser l'espérance de l'estimation des moindres carrés ou pour maximiser l'espérance de l'estimation de la vraisemblance.

L'étude des problèmes d'approximation et d'optimisation stochastiques est assez ancienne. La première approche est due à Robbins & Monro ([111]). Ils ont proposé une méthode pour calculer la solution d'une équation du type  $M(x) = m$  lorsque des  $Y(x)$  tels que  $\mathbb{E}[Y(x)] = M(x)$  sont uniquement observés. Parmi les nombreux travaux visant à étudier les propriétés théoriques des algorithmes d'approximation stochastique, on peut citer parmi les plus récents, ceux de Delyon([45]) ou de Chen & al. ([22]). Pour une étude plus générale de l'approximation stochastique on peut se référer à Delyon([46]). A noter que les travaux de Chen & al. ([22]) ont pour but de régler les problèmes de stabilité de l'algorithme initial de Robbins-Monro.

Cependant, notre objectif est légèrement différent. Nous cherchons à minimiser ou maximiser l'espérance d'une fonction aléatoire. Peu de temps après Robbins-Monro, Kiefer & Wolfowitz ([86]) ont été les premiers à introduire une pro-

cédures de maximisation stochastique. Ces deux procédures sont à l'origine de nombreuses procédures d'optimisation stochastique, ainsi la technique récemment élaborée par Doucet([55]) est elle une modification de l'algorithme de Robbins-Monro. Le principal défaut de ces approches est la lenteur de leur convergence ; plusieurs procédures d'accélération de la convergence ont donc été proposées.

Lors des applications, nous avons comparé les approches originales et l'approche avec accélération de la convergence mise au point par Fabian([61]). Les performances observées pour la procédure de Fabian sont supérieures à celles de la méthode standard de Kiefer-Wolfowitz. Les principes de sa mise en oeuvre sont exposés en annexe. Cependant, le temps de calculs requis est toujours très lourd et certains paramètres étant au choix de l'utilisateur, la prise en main de cette procédure de minimisation n'est donc pas aisée.

Comme un des objectifs de cette thèse est de fournir des techniques d'estimation suffisamment rapides pour une utilisation en ligne, nous n'avons pas poussé plus avant les investigations sur cette voie.

Bien entendu, pour une estimation des paramètres hors ligne, une telle approche est envisageable. Dans ce cas, pour chaque système considéré il sera nécessaire de réaliser une étape préliminaire pour régler les paramètres de l'algorithme de minimisation stochastique.

Pour contourner le problème lié au caractère aléatoire des fonctions à minimiser ou maximiser, une approche, utilisable pour certains de nos filtres, est envisageable. Il s'agit de s'affranchir du caractère aléatoire, en restant sur une réalisation du hasard fixée. Cette approche s'apparente à des techniques d'optimisation sur des estimations MCMC, voir Geyer ([63]), pour une revue autour de cette question. Le principe est le suivant : pour tous les instants  $t$  du passé, les quantités aléatoires simulées sont identifiées à leurs réalisations, il est alors possible d'utiliser les algorithmes de minimisation classiques de type Gauss-Newton. L'estimation des paramètres est ainsi obtenue pour une réalisation aléatoire donnée.

Malheureusement, cette technique, qui consiste à figer les variables aléatoires du passé n'est pas applicable à tous les filtres par convolution proposés. Elle peut uniquement s'appliquer au filtre à mémoire complète et au filtre à mémoire tronquée car aucune sélection n'est effectuée sur les particules. De cette manière, la fonction à optimiser n'est plus aléatoire. Pour le filtre avec sélection ou le filtre avec ré-échantillonnage, les étapes de sélection ou de ré-échantillonnage maintiennent un caractère aléatoire à la fonction à optimiser. Bien que les aléas soient figés, on reste dans le cadre de la minimisation stochastique.

En contrepartie, cette technique d'aléas figés semble particulièrement bien adaptée au cas des systèmes dynamiques contrôlés évoqué dans le chapitre suivant. En effet, la recherche du contrôle optimal dans le cadre stochastique, consiste à minimiser l'espérance d'une fonction aléatoire. Or, le caractère aléatoire est lié à la génération de particules utilisées pour prédire les états futurs du système. Par conséquent, toutes ces générations de particules sont réalisées sans aucune sélection. Ainsi, quel que soit le filtre utilisé, il est possible d'appliquer cette technique pour chercher la commande optimale.

L'étude des propriétés théoriques de cette technique n'est pas réalisée ici. Il est important de noter que des résultats sur la moyenne d'estimations, calculés sur un ensemble de réalisations données, ne serait pas d'un grand intérêt puisque l'objectif de cette technique est de gagner du temps. Pour rester dans l'esprit de cette approche, il serait intéressant d'étudier le comportement de l'estimateur du paramètre (sur une réalisation du hasard), lorsque le nombre d'observations tend vers l'infini. Il semble donc que l'ajout d'une hypothèse d'ergodicité soit nécessaire à l'obtention de tels résultats théoriques.

De plus, il est peut-être envisageable, d'adapter une démarche comparable à celle de l'approche plus générale présentée dans les paragraphes suivants.

Des travaux de Hürzeler & Künsch ([82]), inspirés de techniques d'approximation et de maximisation de vraisemblance par des méthodes MCMC présentées par Geyer([63]), offrent un cadre théorique général pour de telles démarches.

L'idée est que les variables aléatoires, générées pour calculer l'estimation d'intérêt, restent valables lorsque les paramètres  $\theta$  varient et qu'il suffit de faire varier leurs poids respectifs. Afin de préciser ce concept, soit une fonction coût  $u(\theta)$  à optimiser définie par

$$u(\theta) = \mathbb{E}_\theta[g(\theta, Y)] = \int g(\theta, y) dP_\theta(y)$$

où la fonction  $g$  est connue et la loi de probabilité de  $y$  dépend de  $\theta$ . Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  un échantillon de  $P_\theta$  alors une estimation MCMC de  $u(\theta)$  est donnée par

$$u_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta, Y_i)$$

Pour optimiser  $u_n(\theta)$ , il faut donc avoir recours à des techniques d'optimisation stochastique. Mais si l'on suppose qu'il existe une loi de probabilité  $Q$  indépen-

dante de  $\theta$ , telle que  $P_\theta$  admette une densité  $f_\theta$  par rapport à  $Q$ , alors on a

$$u(\theta) = \int g(\theta, y) f_\theta(y) dQ(y)$$

Soient  $Y_1, \dots, Y_n$  un échantillon de  $Q$  alors

$$u_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g(\theta, Y_i) f_\theta(Y_i)$$

ainsi il est possible d'optimiser  $u_n(\theta)$  grâce aux techniques classiques (non stochastique). L'étude des propriétés théoriques de cette méthode d'optimisation statique est réalisée dans Geyer ([63]).

Une adaptation au contexte séquentiel du filtrage non linéaire, pour la maximisation de la vraisemblance, est réalisée par Hürzeler & Künsch ([82]). Plusieurs problèmes se posent en pratique ; par exemple, pour certaines valeurs des paramètres, tous les poids associés aux variables peuvent être faibles, fournissant alors une estimation de mauvaise qualité. Cependant, cette approche demeure très attractive car elle permet de réaliser des optimisations à l'aide d'un seul échantillon. De plus, elle reste tout à fait valide lorsque la valeur des paramètres varie peu. Ainsi Cérou & al. ([17]) ont proposé une estimation du filtre dérivé basée sur ce principe.

Bien entendu, Il est aussi possible d'utiliser une version stochastique de l'algorithme EM pour ce type de problème d'optimisation. Hürzeler & Künsch ([82]) proposent quelques références sur cette alternative, mais sa difficulté d'implémentation la rend rédhibitoire.

## 5.5 Estimation des paramètres par une approche bayésienne

L'idée d'utiliser des méthodes particulières à des fins d'estimation de paramètres n'est pas nouvelle. Pour une revue de la question, on peut consulter Doucet ([55]) ou Liu & West ([98]). Le principe général est simple : le paramètre  $\theta$  est muni d'une loi a priori initiale  $p_0(\theta)$  et le paramètre est ajouté dans l'état  $z_t = (x_t, \theta)$ . De manière analogue au filtre de Monte Carlo pondéré, à chaque instant la loi de  $\theta$  est estimée. Plusieurs problèmes se posent alors pour l'évolution des  $\tilde{\theta}_t^i$  générés, d'un instant  $t$  à  $t + 1$ .

La première approche consiste à ne faire subir aucune évolution aux  $\tilde{\theta}_{t+1}^i = \tilde{\theta}_t^i$ .

Cette technique paraît assez rigoureuse théoriquement mais, en pratique, elle est catastrophique. L'exploration de différentes valeurs pour  $\theta$  est uniquement réalisée dans l'étape d'initialisation. On aboutit donc quel que soit le filtre de Monte Carlo utilisé à une divergence de l'algorithme. En effet, pour le filtre pondéré classique tout le poids est rapidement attribué à une valeur qui a peu de chances d'être la bonne. Pour le filtre avec interaction, la diversité des valeurs de  $\tilde{\theta}_t^i$  baisse inévitablement à chaque instant.

L'idée naturelle pour éviter cette perte de diversité consiste à perturber un peu les valeurs des  $\tilde{\theta}_t$  pour continuer à explorer différentes valeurs des paramètres au cours de l'algorithme. Leur évolution  $\tilde{\theta}_{t+1}^i = \tilde{\theta}_t^i + \eta_t$  est donc artificiellement bruitée (voir par exemple Liu & West ([98])). Ce type de méthode empirique peut être englobé dans un cadre plus rigoureux où l'on impose une dynamique artificielle aux paramètres (Kitagawa[89], Higuchi[74]). Une autre approche, proposée par Gilks & Berzuini ([65]), n'utilise pas de dynamique artificielle, mais un modèle de Markov caché. Mais cette dernière approche ne permet pas d'estimer la valeur des paramètres et soulève quelques problèmes théoriques.

A notre connaissance, les méthodes de filtrage de type Monte-Carlo ne sont globalement pas efficaces, pour estimer les paramètres d'un système dynamique. Cela est, essentiellement, dû au caractère discret de la mesure de probabilité empirique associée aux paramètres. Plus simplement, ces procédures souffrent des mêmes problèmes que les filtres de Monte-Carlo. Pour contourner ce problème West([131]) a proposé de lisser la mesure empirique obtenue de la loi a posteriori des paramètres, avec une loi normale. Dans une certaine mesure, l'approche que nous proposons ici, est une généralisation de cette idée.

En effet, la procédure de filtrage par noyau de convolution fournit uniquement des densités de probabilités. Le problème dû au caractère discret est ainsi naturellement éludé. Dans notre approche, le noyau peut bien sûr être une loi normale, d'où le lien avec West([131]). Mais toute autre fonction vérifiant les conditions imposées aux noyaux peut convenir.

Il est vrai, que la convolution par un noyau peut être vue comme un bruit artificiel. Ainsi, notre approche pourrait s'apparenter à celles précitées. Cependant, il demeure certaines différences à son crédit. Notre démarche reste totalement rigoureuse, puisque nous utilisons le modèle naturel  $\theta_{t+1} = \theta_t$ , les résultats de convergence sont établis dans la suite. Ce qui, en terme de bruitage artificiel de la dynamique, signifie que l'on a identifié toute une famille de bruits acceptables et que l'on a caractérisé la façon dont leur variance doit décroître vers zéro.

En pratique, le problème va se présenter comme pour le filtre par noyau avec ré-échantillonnage. Une densité de probabilité des paramètres  $p_t^n(\theta|y_{1:t})$  est estimée à chaque instant  $t$  et à l'instant  $t + 1$ , un échantillon de  $\tilde{\theta}$  est tiré suivant  $p_t^n(\theta|y_{1:t})$  avant d'effectuer l'évolution des particules ainsi régénérées. Puis, en tenant compte de la nouvelle observation  $y_{t+1}$ , une nouvelle estimation de la densité conditionnelle des paramètres est construite. Il suffit ensuite de recommencer les mêmes opérations à chaque instant.

Cette procédure d'estimation de  $\theta$  s'intègre facilement à tous les filtres par noyau de convolution proposés. Afin de clarifier la formalisation de cette procédure, un algorithme permettant son implémentation est proposé dans la partie suivante.

Avant de développer cet algorithme, précisons les quantités à estimer dans le cas d'un système dynamique contenant des paramètres  $\theta$  inconnus. La densité cible est toujours  $p(x_t|y_{1:t})$ , il faut l'exprimer en fonction de  $\theta$  :

$$p(x_t|y_{1:t}) = \int p(x_t, \theta|y_{1:t})d\theta$$

Les particules sont générées de manière à estimer la densité conjointe  $p(x_t, \theta|y_{1:t})$ . Cette densité jointe joue un rôle central dans l'algorithme. Mais pratiquement, afin d'estimer des valeurs de l'état et des paramètres, les densités marginales  $p(x_t|y_{1:t})$  et  $p(\theta|y_{1:t})$  vont aussi être estimées.

L'algorithme exposé dans la partie suivante, construit ainsi des estimations de  $\hat{p}(x_t|y_{1:t})$  et de  $\hat{p}(\theta|y_{1:t})$  en appliquant un noyau de convolution à des particules générées suivant  $p(x_t, \theta|y_{1:t})$ .

**Remarque :** Les paramètres  $\theta$  étant des valeurs fixées, il peut paraître surprenant de leur appliquer une densité de probabilité. Cette densité représente en fait une connaissance a priori. Cette approche s'inscrit dans le débat entre les statistiques bayésiennes et les statistiques classiques. On ne s'étendra pas ici sur le sujet. Cette question est notamment discutée par Robert([112]) ou Bernardo & Smith ([11]).

### 5.5.1 Algorithme de filtrage pour des systèmes dynamiques paramétrés

Soit  $p_0(\theta)$  la loi a priori des paramètres. Elle représente l'incertitude sur les vraies valeurs inconnues de  $\theta$ ,  $\theta_0$ . Son choix pose un problème théorique et pra-

tique. Mais il est raisonnable, de supposer que les spécialistes ayant fourni le système dynamique à étudier, aient une idée sur la nature de la loi, ou soient au moins en mesure de proposer un intervalle, ou une boule, contenant les valeurs des paramètres. Dans ce dernier cas, un choix naturel pour  $p_0(\theta)$  est la loi uniforme sur l'intervalle ou sur la boule.

L'algorithme ci-dessous, permet de calculer des estimations de  $p(x_t, \theta | y_{1:t})$ ,  $p(x_t | y_{1:t})$  et  $p(\theta | y_{1:t})$ . La première loi est l'élément clé de l'algorithme. Elle sert de générateur de variables aléatoires et est mise à jour à chaque instant. Les deux dernières loi de probabilité servent uniquement pour estimer  $x_t$  et  $\theta$ .

Cet algorithme est proposé pour le filtre par convolution avec ré-échantillonnage car il en est l'extension naturelle. En pratique, l'utilisateur doit choisir la loi a priori  $p_0(\theta)$  des paramètres, le nombre de particules  $n$  et la largeur de la fenêtre  $h$ .

**Initialisation** :  $t = 1$

- Génération des trajectoires : pour  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}\bar{x}_0^i &\sim p_0(x), \bar{\theta}_0^i \sim p_0(\theta), \varepsilon_0^i \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_0}, \tilde{\eta}_1^i \sim \mathcal{L}_{\eta_1} \\ \tilde{x}_1^i &= f_1(\bar{x}_0^i, \bar{\theta}_0^i, \varepsilon_0^i) \\ \tilde{y}_1^i &= h_1(\tilde{x}_1^i, \bar{\theta}_0^i, \tilde{\eta}_1^i) \\ \tilde{\theta}_1^i &= \bar{\theta}_0^i\end{aligned}$$

- Estimation des densités :

$$\begin{aligned}\hat{p}_1^n(x, \theta | y_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_{h_n}(\tilde{\theta}_1^i - \theta) \times K_{h_n}(\tilde{x}_1^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1)} \\ \hat{p}_1^n(\theta | y_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_{h_n}(\tilde{\theta}_1^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1)} \\ \hat{p}_1^n(x | y_1) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_{h_n}(\tilde{x}_1^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_1^i - y_1)}\end{aligned}$$

-  $t = t + 1$

**Etape t** :  $t > 1$

$Et_1$  - Génération des trajectoires : pour  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned}
(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i) &\sim \hat{p}_{t-1}^n(x, \theta | y_{1:t-1}), \tilde{\varepsilon}_{t-1}^i \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_{t-1}}, \tilde{\eta}_t^i \sim \mathcal{L}_{\eta_t} \\
\tilde{x}_t^i &= f_t(\bar{x}_{t-1}^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\varepsilon}_{t-1}^i) \\
\tilde{y}_t^i &= h_t(\tilde{x}_t^i, \bar{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\eta}_t^i) \\
\tilde{\theta}_t^i &= \bar{\theta}_{t-1}^i
\end{aligned}$$

$Et_2$  - Estimation des densités :

$$\begin{aligned}
\hat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_{h_n}(\tilde{\theta}_t^i - \theta) \times K_{h_n}(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t)} \\
\hat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_{h_n}(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t)} \\
\hat{p}_t^n(x | y_{1:t}) &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_{h_n}(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(\tilde{y}_t^i - y_t)}
\end{aligned}$$

$-t = t + 1$  et retour à  $Et_1$ .

**Remarques :** Cette technique d'estimation des paramètres peut s'adapter à une grande variété de filtres, notamment ceux de Monte Carlo, usuels ou avec interaction. Cependant, l'étude théorique réalisée dans la suite est uniquement valable pour le filtre par convolution avec ré-échantillonnage.

De plus, il semble que cette approche puisse aussi s'appliquer à des systèmes dynamiques dont les paramètres  $\theta$  varient dans le temps. Plus précisément dans les cas très généraux où la forme de l'évolution n'est pas connue mais est supposée assez lente.

## 5.5.2 Etude des propriétés théoriques

L'étude des propriétés théoriques est effectuée pour l'algorithme présenté ci-dessus, c'est-à-dire lorsque l'on couple l'estimation de paramètres inconnus au filtre par convolution avec ré-échantillonnage.

**Théorème 5.5.1** *Sous les hypothèses du théorème 3.5.2,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^{q+d+q}}{\log n} = \infty \\ \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \end{array} \right. \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) - p_t(x, \theta | y_{1:t})\|_{L1} = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Ce résultat se démontre de la même façon que le théorème 3.5.2 en augmentant l'état,  $x_t$  devient  $x'_t = (x_t, \theta)$  et en prenant comme noyau d'évolution sur  $\theta$ , l'identité. Le noyau d'évolution de  $x'_t$  est alors  $Q'_t = [Q_t \ I_d]$ .

Comme pour le problème du filtrage au chapitre 3, il est possible de préciser la vitesse de convergence, pour cela il faut considérer le noyau  $\tilde{K}^1$  utilisé pour estimer la densité conjointe de  $x_t, y_t, \theta$ .

**Corollaire 5.5.1.1 (vitesse de convergence  $L_1$  intégrée)** *Si pour tout  $t$  les densités  $p(y_t|y_{1:t-1}) = p_Y$  et  $p(x_t, y_t, \theta|y_{1:t-1}) = p_{XY}$  appartiennent à  $W^{s,1}$  et les noyaux  $\tilde{K}^1 \in L_1(\mathbb{R}^{q+d+p})$  et  $K^2 \in L_1(\mathbb{R}^q)$  sont de classe  $s \geq 1$ , si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a pour  $(K, f, a) = \{(K^2, p(y_t|y_{1:t-1}), q), (\tilde{K}^1, p(x, \theta, y_t|y_{1:t-1}), d+p+q)\}$ ,  $\int \|x\|^{a+\varepsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{a+\varepsilon}) f(x) dx < \infty$  avec  $h_n > 0$ , si le noyau  $K^2$  est borné, on a*

$$\mathbb{E} \left[ \int |\hat{p}_t^n(x, \theta|y_{1:t}) - p_t(x, \theta|y_{1:t})| dx_t \right] = u_t [O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^{q+d+p}})]$$

avec  $u_t = 2^t - 1$ .

L'espérance est calculée ici par rapport à toutes les variables aléatoires simulées et par rapport à la trajectoire d'observations  $y_{1:t}$ .

**Démonstration :** De même que pour la démonstration précédente, pour montrer ce résultat il suffit d'adapter une démonstration du chapitre 3. Ici il faut se rapporter à la démonstration du théorème 3.5.3.

Le théorème 5.5.1 assure la convergence des quantités qui nous intéressent le plus, les lois marginales.

**Corollaire 5.5.1.2** *Si le noyau  $K$  est borné, si pour tout  $t$ ,  $p(y_t|y_1, \dots, y_{t-1}) > 0$ , alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{q+d+p}/\log n = \infty$  entraînent*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{p}_t^n(x|y_{1:t}) - p_t(x|y_{1:t})\|_{L_1} &= 0 \quad ps \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \|\hat{p}_t^n(\theta|y_{1:t}) - p_t(\theta|y_{1:t})\|_{L_1} &= 0 \quad ps \end{aligned}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned} \int |\hat{p}_t^n(x|y_{1:t}) - p_t(x|y_{1:t})| dx &= \int \left| \int (\hat{p}_t^n(x, \theta|y_{1:t}) - p_t(x, \theta|y_{1:t})) d\theta \right| dx \\ &\leq \int |\hat{p}_t^n(x, \theta|y_{1:t}) - p_t(x, \theta|y_{1:t})| d\theta dx \end{aligned}$$

Le théorème 5.5.1 permet de conclure. Pour la convergence de  $\widehat{p}_t^n(\theta|y_{1:t})$  c'est exactement la même démarche.

La vitesse de convergence des lois marginales est donc supérieure à celle de la loi conjointe. Le corollaire suivant est immédiat :

**Corollaire 5.5.1.3 (vitesse de convergence  $L_1$  intégré)** *Sous les hypothèses du corollaire 5.5.1.1*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\|\widehat{p}_t^n(x|y_{1:t}) - p_t(x|y_{1:t})\|_{L_1}] &= u_t[O(h_n^s) + O(\frac{1}{\sqrt{nh_n^{d+q+p}}})] \\ \mathbb{E}[\|\widehat{p}_t^n(\theta|y_{1:t}) - p_t(\theta|y_{1:t})\|_{L_1}] &= u_t[O(h_n^s) + O(\frac{1}{\sqrt{nh_n^{d+q+p}}})]\end{aligned}$$

avec  $u_t = 2^t - 1$ .

Pour certains problèmes, il est plus intéressant de fournir une estimation de la valeur des paramètres plutôt que la densité a posteriori. Dans ce cas, un estimateur obtenu par cette procédure, peut être la moyenne de l'approximation de la loi conjointe. Soient  $(\bar{x}_t^i, \bar{\theta}_t^i)$  générés à partir de  $\widehat{p}_t^n(x, \theta|y_{1:t})$ , notons

$$\widehat{\theta}_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\theta}_t^i$$

et

$$\widehat{x}_t^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{x}_t^i$$

**Remarque :** Il est possible d'améliorer ces estimations  $\widehat{\theta}_t^n$  et  $\widehat{x}_t^n$  par réduction de la variance d'échantillonnage (cf §2.3.1).

Certains résultats établis au chapitre 4, permettent de démontrer la convergence de  $\widehat{\theta}_t^n$  et  $\widehat{x}_t^n$  vers respectivement  $\mathbb{E}[\theta|y_{1:t}]$  et  $\mathbb{E}[x_t|y_{1:t}]$ .

**Théorème 5.5.2** *Si  $\text{Var}[x_t, \theta_t|y_{1:t}]$  existe et est finie, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^{d+q+p} / \log n = 0$  entraînent*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{\theta}_t^n - \mathbb{E}[\theta|y_{1:t}]| = 0 \quad ps$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |\widehat{x}_t^n - \mathbb{E}[x_t|y_{1:t}]| = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** La démonstration est une adaptation de celle du théorème 4.1.18.

**Remarque :** Les théorèmes précédents assurent que nos estimations convergent vers la loi a posteriori des paramètres ou vers  $\mathbb{E}[\theta|y_{1:t}]$ , selon le cas considéré. Ces quantités sont les estimateurs bayésiens de  $\theta$ . Il est alors essentiel de préciser leurs propriétés théoriques. C'est l'objet du paragraphe suivant.

### Consistance des estimateurs bayésiens

Les premiers résultats de consistance des approches bayésiennes sont dus à Doob ([53, 54]). Pour une étude plus complète on pourra se reporter à Schwartz ([120]). Le résultat que nous énonçons est démontré par Schervish ([119]) sur la base des travaux de Doob ([53, 54]).

**Théorème 5.5.3** *S'il existe un estimateur consistant de  $\theta_0 \in \Theta$  lorsque le nombre d'observations  $y_1, \dots, y_t$  tend vers l'infini, alors toute loi a posteriori est consistante au sens suivant :*

*Pour tout élément  $A$  de la tribu  $\mathcal{F}$  associée à  $\Theta$ , alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(A|y_{1:t}) = I_A(\theta_0) \quad ps$$

où  $I_A$  est la fonction indicatrice de  $A$ .

Enfin, le résultat suivant est démontré dans Schwartz ([120]) :

**Théorème 5.5.4** *S'il existe un estimateur consistant de  $\theta_0 \in \Theta$  lorsque le nombre d'observations  $y_1, \dots, y_t$  tend vers l'infini, alors*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\theta|y_{1:t}] = \theta_0 \quad ps$$

Ces deux théorèmes assurent donc que les estimations fournies par notre algorithme convergent vers la vraie valeur des paramètres. La seule condition est que les observations  $y_1, \dots, y_t$  contiennent suffisamment d'information pour estimer les paramètres. Cette condition peut s'interpréter comme une condition d'observabilité des paramètres.

## 5.6 Conclusion du cinquième chapitre

Les différentes approches d'estimation de paramètres proposées dans ce chapitre illustrent bien la grande capacité d'adaptation de nos filtres à convolution. Les premières, basées sur la maximisation de la vraisemblance estimée et la minimisation des moindres carrés conditionnels estimés possèdent cependant plusieurs défauts. Tout d'abord, ceux d'ordre pratique : le temps de calcul est trop élevé pour autoriser une utilisation en ligne, il faut choisir arbitrairement le nombre d'observations sur lequel on fait la minimisation. Celui d'ordre théorique : on a besoin d'une hypothèse de convergence uniforme, difficile à vérifier.

Pourtant, comme on l'a évoqué, il est possible d'envisager une alternative à l'optimisation stochastique, moins coûteuse en terme de temps de calcul. Tout d'abord, il n'est pas certain que le temps de calcul soit suffisamment réduit pour une utilisation en ligne car, il est tout de même nécessaire d'utiliser un nombre  $T$  d'observation conséquent pour que les estimations puissent converger. En supposant que l'optimisation soit suffisamment rapide pour travailler en ligne, il est alors impossible de filtrer tant que  $t < T$ , ce qui peut être ennuyeux dans certaines situations. De plus, les propriétés théoriques de cette optimisation alternative ne sont pas clairement établies.

L'approche bayésienne d'estimation des paramètres, présentée en dernier lieu, est parfaitement adaptée à un usage en ligne et ses propriétés théoriques sont clairement établies, sans l'ajout d'hypothèse supplémentaire. Donc cette dernière approche semble à première vue la plus intéressante.

Toutefois, afin d'évaluer d'un point de vue pratique, le potentiel de ces différentes approches, une étude comparative est réalisée dans le chapitre des applications.



# Chapitre 6

## Perspectives d'application au contrôle de systèmes dynamiques

Ce chapitre est l'occasion de proposer une adaptation de notre filtre à noyau de convolution au cas des systèmes contrôlés. L'intérêt de l'étude de ce type de système n'est plus à démontrer, puisque une grande variété de problèmes réels se présente sous la forme d'un système dynamique mal observé à contrôler. Pour les systèmes dynamiques contrôlés, le filtre fournit une estimation de l'état qui aide à déterminer la commande à appliquer au système, par la variable de contrôle, pour lui imposer le comportement désiré.

L'introduction d'une variable de contrôle  $u_t$  dans le système dynamique ne pose pas de difficulté particulière. Elle s'intègre facilement dans nos algorithmes d'estimation du filtre optimal. Nous proposons une manière de procéder dans la première partie de ce chapitre.

La question du calcul d'un contrôle optimal, pour un objectif de contrôle donné, est bien plus délicate. Nous l'abordons dans la seconde partie, au travers d'approches comparables à celles utilisées pour l'estimation de paramètres au chapitre précédent.

### 6.1 Introduction d'une commande prédéterminée

Considérons toujours la même classe générale de systèmes dynamiques à laquelle on applique à chaque instant  $t$ , un contrôle  $u_t$  dont les valeurs sont déjà

connues pour tout  $t$ .

$$\begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, u_t, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad (6.1)$$

Description des variables :

- les  $x_t \in \mathbb{R}^d$  sont les variables d'état
- les  $u_t \in C_u \subset \mathbb{R}^l$  sont les variables de contrôle, avec  $C_u$  un compact
- les  $y_t \in \mathbb{R}^q$  sont les variables observées
- les  $\varepsilon_t$  sont les bruits du modèle d'état
- les  $\eta_t$  sont les bruits du modèle d'observation

Le système peut se traiter exactement comme un système non contrôlé, pour tout ce qui concerne les générations de particules. En effet, le système (6.1) est équivalent au système suivant

$$\begin{cases} x_t = \tilde{f}_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases} \quad \text{avec } \tilde{f}_t(\cdot, \cdot) = f_t(\cdot, u_t, \cdot) \quad (6.2)$$

Comme la valeur de la variable  $u_t$  est déterministe et connue à chaque instant  $t$ , cette formalisation est tout à fait valide. L'emploi de tous les filtres à noyaux de convolution présentés au troisième chapitre est donc totalement justifié pour le filtrage de ce systèmes. A fortiori, tous les résultats de convergence sont aussi valides.

Intéressons nous maintenant au problème rencontré plus fréquemment et d'intérêt pratique considérable, la détermination des valeurs de la suite des contrôles  $u_t$ , en fonction d'un certain objectif. En général, l'objectif est de suivre une trajectoire de référence ou de minimiser un critère. On se ramène alors souvent à un problème de minimisation par rapport à  $(u_t, \dots, u_{t+T})$  d'une fonction coût objectif  $C_t(u_t, \dots, u_{t+T}, x_t, \dots, x_{t+T})$ . Selon la situation pratique à laquelle se réfère le système, on peut, soit vouloir par exemple minimiser  $C_t(u_t, \dots, u_{t+T}, x_t, \dots, x_{t+T})$  à chaque instant  $t$ , soit minimiser la moyenne des  $C_t(u_t, x_t)$  sur un horizon fini ou infini, ou encore minimiser la variance des  $C_t(u_t, \dots, u_{t+T}, x_t, \dots, x_{t+T})$  sur un horizon fini ou infini . . .

Toutes ces problématiques relèvent de la théorie du contrôle optimal. Dans le paragraphe suivant nous illustrons l'application de nos filtres à convolution à un problème type de contrôle optimal prédictif à horizon glissant.

## 6.2 Estimation d'un contrôle optimal prédictif

Considérons le cas, assez général, d'un contrôle prédictif sur un horizon glissant de longueur  $H$ . La commande optimale à l'instant  $t$  est  $\bar{u}_t$  avec

$$(\bar{u}_t, \dots, \bar{u}_{t+H}) = \operatorname{argmin}_{u_t, \dots, u_{t+H}} \sum_{k=t}^{t+H} C_k(u_k, \mathbb{E}[x_k | y_{1:t-1}, u_{t:k}])$$

Bien entendu, notre approche s'adapte au cas où la somme ci-dessus est pondérée. Après application de la commande optimale  $\bar{u}_t$  ainsi calculée, on résout un problème d'optimisation analogue à l'instant  $t + 1$ , et ainsi de suite.

Un exemple classique d'un tel problème de contrôle est le suivi de consigne par contrôle prédictif. On cherche à maintenir  $x_t$  au plus près d'une trajectoire de référence  $x_t^*$ . La fonction de coût associée est :

$$(\bar{u}_t, \dots, \bar{u}_{t+H}) = \operatorname{argmin}_{u_t, \dots, u_{t+H}} \sum_{k=t}^{t+H} \|x_k^* - \mathbb{E}[x_k | y_{1:t-1}, u_{t:k}]\|^2$$

La recherche de  $(\bar{u}_t, \dots, \bar{u}_{t+H})$  peut donc être réalisée en faisant intervenir les techniques développées au Chapitre 5. Pour des valeurs en cours de  $u_{t:k}$  donné, et pour  $k = t, t + 1, \dots, t + H$ ,  $\mathbb{E}[x_k | y_{1:t-1}, u_{t:k}]$  pourra être estimée par une généralisation immédiate (prédiction d'état) des algorithmes de filtrage par convolution présentés dans le troisième chapitre.

Ce calcul sera inséré dans une boucle d'optimisation du critère par rapport à  $u_t, \dots, u_{t+H}$ . On peut évidemment craindre une augmentation conséquente du temps de calcul.



# Chapitre 7

## Positionnement par rapport aux filtres particulaires

Nos filtres par noyaux de convolution sont proches des filtres particulaires usuels car, comme eux, ils sont basés sur une génération massive de variables aléatoires, appelées particules dans le contexte du filtrage. Cependant, les deux approches sont fondamentalement différentes, puisque les filtres par convolution sont basés sur une estimation de la densité conjointe état-observation, alors que les filtres particulaires estiment la mesure empirique de l'état, en pondérant judicieusement les particules générées. Toutefois, en modifiant quelque peu la présentation des filtres par convolution, on peut mettre en évidence la parenté entre les deux approches. Cette démarche est réalisée dans la suite pour le filtre par convolution avec ré-échantillonnage, mais il est tout à fait possible de la mener avec les autres filtres par convolution.

### 7.1 Formalisation de type filtre particulaire de l'algorithme du filtre par convolution avec ré-échantillonnage

Soit  $\pi_t^n$  l'estimation du filtre optimal,  $\pi_t$ , construite avec la méthode de ré-échantillonnage. Utilisons aussi les notations employées en filtrage particulaire :  $Q_t$  désigne le noyau d'évolution markovien,  $\psi_n$  désigne la fonction de pondération d'une particule définie, pour le filtre à convolution considéré, par  $\psi_n(\tilde{x}_t^i) = K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^i)$ . Ainsi notre filtre avec ré-échantillonnage peut se résumer en quatre

étapes semblables à celles des filtres particuliers régularisés proposés par Oudjane([104]) :

**- Etape d'échantillonnage**

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{t-1}^i &\sim \pi_{t-1}^n \text{ pour } i = 1, \dots, n \\ &\rightarrow \text{estimation de la mesure empirique } \mu_{t-1}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_{t-1}^i} \end{aligned}$$

**- Etape d'évolution**

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t^i &\sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot) \text{ et } \tilde{y}_t^i \sim h_t(\tilde{x}_t^i, \eta_t) \text{ pour } i = 1, \dots, n \\ &\rightarrow \text{estimation de la mesure prédictive } \mu_{t|t-1}^n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i} \end{aligned}$$

**- Etape de pondération**

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{\tilde{x}_t^i} \mapsto \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}$$

avec

$$\omega_t^i = \frac{K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^i)}{\sum_{j=1}^n K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^j)}$$

→ Approximation de la mesure empirique du filtre optimal :  $\mu_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_t^i}$

**- Etape de régularisation**

$$\begin{aligned} \pi_t^n(x) &= (K_{h_n} * \mu_t^n)(x) \\ &= \sum_{i=1}^n \omega_t^i K_{h_n}(x - \tilde{x}_t^i) \\ &= \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^i) K_{h_n}(x - \tilde{x}_t^i)}{\sum_{j=1}^n K_{h_n}(y_t - \tilde{y}_t^j)} \end{aligned}$$

Ainsi on peut écrire

$$\pi_t^n = K_{h_n} * (\psi_n \cdot Q_t \mu_{t-1}^n)$$

Cette formalisation dénature quelque peu les filtres par convolution, puisque l'idée de base, d'estimer la densité conjointe de  $(x_t, y_t)$  est dissimulée pour mettre en lumière l'aspect pondération de particule. Cependant, elle permet de faire apparaître la différence essentielle entre les filtres particuliers courants et nos filtres par convolution : la nature de la fonction de pondération  $\psi_n$  des particules. Pour

les filtres particulières, il s'agit de la fonction de vraisemblance des observations, alors que pour nos filtres, on peut utiliser n'importe quel noyau vérifiant quelques hypothèses peu contraignantes. Ainsi, l'hypothèse de connaissance de la forme analytique de la vraisemblance n'est plus requise.

Il est important de noter, que Del Moral & al. ([32],[33]) dans un contexte différent et pour d'autres raisons, ont utilisé une fonction de pondération autre que la vraisemblance car elle était inaccessible. Ils proposent une fonction de pondération pouvant s'apparenter à un noyau sur des observations générées, mais leur objectif n'est pas toutefois d'estimer la densité conjointe état-observation.

Pour résumer, Del Moral & al. ([32],[33]) ont proposé une version où les observations sont régularisées. Hürzeler & Künsch([81]), Le Gland & Oudjane([95]) ou encore Musso & al.([102]) propose de régulariser les variables d'états.

L'intérêt de ces régularisations est de stabiliser en pratique le comportement du filtre. Théoriquement, cela s'interprète comme travailler sur le même système, mais avec des bruits d'amplitudes différentes, vérifiant ainsi un bon rapport signal/bruit assurant un meilleur fonctionnement des méthodes particulières.

En présentant les choses sous le même angle, les filtres par convolution introduits dans ce mémoire, consistent à régulariser tout le système dynamique, c'est à dire les états et les observations. Il est ainsi possible de les utiliser sur des systèmes dynamiques mal supportés par les autres filtres puisque la régularisation de tout le système, nous amène toujours à considérer un système dynamique, proche du vrai, ayant un bon rapport signal/bruit.

En effet, la régularisation par noyau de convolution peut s'interpréter comme l'ajout d'un bruit dont l'amplitude est caractérisée par la fenêtre du noyau  $h_n$ . Ainsi en pratique, les coefficients  $h_n$ , utilisés avec les noyaux pour régulariser les états et les observations, modifient le rapport signal/bruit du système non régularisé.

Les démonstrations établies peuvent alors s'interpréter comme suit : lorsque l'erreur que l'on commet par rapport au vrai système tend vers zéro, c'est à dire  $h_n \rightarrow 0$  (en fonction de l'augmentation du nombre de particules), le filtre par convolution converge.

Afin de comparer sur le plan théorique le filtre particulière avec interaction et le filtre par convolution avec ré-échantillonnage, nous donnons une des propriétés théoriques du filtre particulière (Del Moral & Jacod [33]) :

**Théorème 7.1.1** *Pour toute fonction borélienne  $f$  bornée on a*

$$\mathbb{E}[|\hat{\pi}_t^n(f) - \pi_t(f)|] \leq \frac{c_t \|f\|_\infty}{\sqrt{n}}$$

où  $\pi_t$  est la mesure associée au filtre optimal à l'instant  $t$ ,  $\hat{\pi}_t^n$  son estimation obtenue par le filtre particulière avec interaction avec  $n$  particules,  $\pi_t(f) = \mathbb{E}[f(x_t)|y_{1:t}]$  et  $\hat{\pi}_t^n(f) = \mathbb{E}_{\hat{\pi}_t^n}[f(x_t)|y_{1:t}]$ .

D'après Del Moral & Jacod ([33]) p53, les constantes  $c_t$  évoluent typiquement comme  $\exp(ct^2)$  avec  $c > 0$ . Pour le filtre avec ré-échantillonnage on peut étudier la même quantité :

**Théorème 7.1.2** *Sous les hypothèses du théorème 3.5.3, pour toute fonction borélienne  $f$  bornée on a*

$$\mathbb{E}[|\hat{p}_t^n(f) - p_t(f)|] \leq u_t \|f\|_\infty \left[ A_1 h_n^s + \frac{A_2}{\sqrt{n h_n^{q+d}}} \right]$$

avec  $u_t = 2^t - 1$ ,  $A_1$  et  $A_2$  positifs indépendants de  $f$ ,  $n$  et  $t$ .

Où  $p_t$  est la densité associée au filtre optimal à l'instant  $t$ ,  $\hat{p}_t^n$  son estimation obtenue par le filtre par convolution avec ré-échantillonnage pour  $n$  particules.

Démonstration : Elle découle du théorème 3.5.3.

Bien que pour les deux filtres, les majorations de vitesse de convergence soient très mauvaises par rapport au temps  $t$ , celle du filtre avec ré-échantillonnage est tout de même meilleure lorsque  $t$  devient grand. Cependant, dans la mesure où ces majorations sont obtenues assez grossièrement, on ne peut pas rigoureusement conclure à la supériorité de l'un ou l'autre des filtres. Del Moral & Jacod ([33]) conseillent de se référer au théorème central limite afin de mieux appréhender l'erreur commise par le filtre avec interaction. Comme nous n'avons pas encore établi ce type de résultats pour nos filtres, nous ne pouvons les comparer sur ce plan-là.

Pour résumer, les filtres particuliers sont convergents, les filtres avec convolution le sont aussi, mais grâce à l'hypothèse d'existence de la densité on peut montrer des résultats théoriques plus forts pour ces derniers, tels que, par exemple, la convergence en norme  $L_1$ .

Au vu de la nature actuelle des résultats théoriques de convergence de nos différents filtres, pour les comparer aux autres filtres particuliers, il est nécessaire

de les tester en pratique sur différents systèmes dynamiques et dans différentes conditions. Nous réalisons ce type d'étude au travers d'applications sur des systèmes simulés, au chapitre suivant.

Comme cela a déjà été évoqué, le principal avantage de nos filtres est de ne pas exiger la connaissance de la forme analytique de la vraisemblance des particules. Or, en rajoutant une étape d'estimation de la vraisemblance dans l'algorithme de construction des filtres particuliers, il est possible de les mettre en place sous cette hypothèse moins forte. Bien, qu'une telle démarche soit empirique, il est possible de récupérer les résultats de convergences des filtres particuliers grâce aux résultats de Del Moral & al. ([32],[33]).

Afin d'illustrer la remarque, cette adaptation des filtres particuliers au cas où la forme analytique de la vraisemblance est inconnue, est détaillée dans la section suivante.

## 7.2 Filtres particuliers construits à partir d'une approximation de la vraisemblance

Les filtres particuliers avec interaction, ayant largement démontré leur supériorité sur les filtres de Monte Carlo usuels, sont donc utilisés comme supports à tous les développements réalisés. Cependant, il est tout à fait possible d'envisager les mêmes modifications sur les filtres de Monte Carlo pondérés.

Tout d'abord rappelons la forme standard de l'algorithme du filtre particulier avec interaction :

Génération de  $n$  particules

$$(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n) \text{ i.i.d. } \sim \pi_0$$

Calcul du filtre

$$\pi_0^n = \sum_{i=1}^n \omega_0^i \delta_{\tilde{x}_0^i} \quad \text{avec} \quad \omega_0^i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, \dots, n$$

- (i) Echantillonnage : on génère  $(\tilde{x}_{t-1}^1, \dots, \tilde{x}_{t-1}^n) \sim \pi_{t-1}^n$ .
- (ii) Evolution des particules :  $\tilde{x}_{t|t-1}^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot)$
- (iii) Pondération des particules :

$$\omega_t^i = \frac{\Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{i=1}^n \Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}$$

on obtient ainsi l'approximation du filtre optimal

$$\pi_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i}$$

Comme nous sommes sous l'hypothèse,  $\Psi_t$  inconnue, il est impératif de modifier l'étape (iii). Afin d'être au plus proche de nos filtres par convolution, nous proposons d'estimer  $\Psi_t$  par des noyaux de convolution.

Pour simplifier les explications, considérons à un instant  $t$  fixé, une observation  $y_t$  donnée et une particule  $\tilde{x}_t$  à pondérer.

Nous sommes en mesure de générer une ou plusieurs observations correspondant à  $\tilde{x}_t : \tilde{y}_t^1, \dots, \tilde{y}_t^N$ . A partir de ces observations, on peut estimer  $p(y_t | \tilde{x}_t)$  à l'aide d'un noyau de convolution :

$$\hat{p}^N(y_t | \tilde{x}_t) = \frac{1}{Nh^q} \sum_{i=1}^N K_h(y_t - \tilde{y}_t^i).$$

Comme la quantité qui nous intéresse est  $\Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i) = p(y_t | \tilde{x}_{t|t-1}^i)$  il suffit de substituer  $\hat{p}^N(y_t | \tilde{x}_{t|t-1}^i)$  à  $\Psi_t(\tilde{x}_{t|t-1}^i)$  pour obtenir une approximation de  $\hat{\omega}_t^i$  de  $\omega_t^i$  dans l'algorithme précédent.

L'introduction de cette modification dans l'algorithme du filtre particulière avec interaction peut se transcrire comme suit :

Génération de  $n$  particules :  $(\tilde{x}_0^1, \dots, \tilde{x}_0^n) i.i.d. \sim \pi_0$

Calcul du filtre :  $\pi_0^n = \sum_{i=1}^n \omega_0^i \delta_{\tilde{x}_0^i}$  avec  $\omega_0^i = \frac{1}{n}$ ,  $i = 1, \dots, n$

- (i) Echantillonnage : on génère  $(\tilde{x}_{t-1}^1, \dots, \tilde{x}_{t-1}^n) \sim \pi_{t-1}^n$ .
- (ii) Evolution des particules :  $\tilde{x}_{t|t-1}^i \sim Q_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \cdot)$
- (iii) Pondération des particules :
- Etape 0  $i=1$
- Etape 1 Génération de  $N$  observations  $\tilde{y}_t^1, \dots, \tilde{y}_t^N$  associées à la particule  $\tilde{x}_{t|t-1}^i$
- Etape 2 Calcul de l'approximation  $\hat{p}^N(y_t | \tilde{x}_{t|t-1}^i) = \frac{1}{Nh^q} \sum_{j=1}^N K_h(y_t - \tilde{y}_t^j)$   
Approximation du poids de  $\tilde{x}_{t|t-1}^i$  :  $\omega_t^i = \hat{p}^N(y_t | \tilde{x}_{t|t-1}^i)$
- Etape 3  $i=i+1$ . Si  $i > n$  étape 4, Sinon étape 1
- Etape 4 Normalisation des poids :  $\hat{\omega}_t^i = \frac{\omega_t^i}{\sum_{i=1}^n \omega_t^i}$
- On obtient finalement l'approximation suivante du filtre optimal

$$\hat{\pi}_t^n = \sum_{i=1}^n \omega_t^i \delta_{\tilde{x}_{t|t-1}^i}$$

Il n'est pas nécessaire d'expérimenter ce filtre en simulations, pour savoir que le temps de calcul, requis par ce dernier, sera beaucoup plus élevé, que celui requis par les filtres particuliers ou par nos filtres à noyaux. En effet, pour chacune des  $n$  particules, il faut générer  $N$  observations, concrètement,  $n * N$  opérations supplémentaires sont à effectuer, à chaque instant  $t$ .

Cependant, cet argument de temps de calcul excessif, en défaveur de ce filtre particulier modifié, ne conservera pas sa pertinence bien longtemps, puisque la vitesse de calcul des microprocesseurs double tous les ans.

Sur le plan théorique, il conserve des propriétés de convergence similaires à celles des filtres particuliers. En effet, Del Moral & al([32]), ont établi des résultats pour diverses situations. Or, le cas le plus général (p361-364), plus précisément le théorème 5.1, fournit des majorations, pour le filtre particulier avec interaction  $\tilde{\pi}_t$ , construit à partir d'une fonction de pondération autre que la vraisemblance :

**Théorème 7.2.1 (Théorème 5.1, Del Moral & al([32]))** *Sous des conditions de régularité du système dynamique, pour toute fonction  $f$  borélienne bornée, on a*

$$\mathbb{E}[|\tilde{\pi}_t^n(f) - \pi_t(f)|] \leq \frac{F_t}{n^{1/(2+q)}} \|f\|$$

avec  $F_t$  exponentiels en  $t^2$ .

Le filtre approximation  $\tilde{\pi}_t^n(f)$  est construit à l'aide d'une fonction de pondération  $\Psi_n$  définie par

$$\Psi_n(y) = n^{q/(2+q)} \Psi(y n^{1/(2+q)}) \quad y \in \mathbb{R}^q$$

et  $\Psi$  une fonction borelienne bornée vérifiant

$$\int \Psi(y) dy = 1 \quad \text{et} \quad \int |y| \Psi(y) dy < \infty$$

L'estimation du filtre optimal s'écrit ainsi :

$$\tilde{\pi}_t^n(f) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Psi_n(y - \tilde{y}_t^i) f(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{i=1}^N \Psi_n(y - \tilde{y}_t^i)}$$

Dans notre contexte, si l'on pose  $K = \Psi$  et  $h_n = n^{1/(2+q)}$ , on a  $\Psi_n(y) = K_h(y)$ . Donc l'estimation fournie par le filtre particulière modifié s'écrit aussi

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_t^n(f) &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \omega_t^i f(\tilde{x}_{t|t-1}^i) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{K_h(y - \tilde{y}_t^i) f(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{j=1}^N K_h(y - \tilde{y}_t^j)} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{\Psi_n(y - \tilde{y}_t^i) f(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{j=1}^N \Psi_n(y - \tilde{y}_t^j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Psi_n(y - \tilde{y}_t^j) f(\tilde{x}_{t|t-1}^i)}{\sum_{j=1}^N \Psi_n(y - \tilde{y}_t^j)} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_t^{j,n}(f) \end{aligned}$$

Ainsi le filtre  $\hat{\pi}_t^n$  correspond à une moyenne de  $N$  filtres  $\tilde{\pi}_t^{j,n}$ . On peut donc utiliser le résultat du théorème 7.2.1, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\hat{\pi}_t^n(f) - \pi_t(f)|] &= \mathbb{E}\left[\left|\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \tilde{\pi}_t^{j,n}(f) - \pi_t(f)\right|\right] \\ &\leq \frac{1}{N} \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^N |\tilde{\pi}_t^{j,n}(f) - \pi_t(f)|\right] \\ &\leq \mathbb{E}[|\tilde{\pi}_t^{1,n}(f) - \pi_t(f)|] \\ &\leq \frac{F_t}{n^{1/(2+q)}} \|f\| \end{aligned}$$

Ce résultat, bien qu'il assure la consistance du filtre  $\hat{\pi}_t^n$ , est un peu décevant, puisque le fait qu'on moyenne  $N$  fois, n'intervient pas dans la borne de majoration. Il est certainement possible de l'améliorer afin de faire apparaître un terme en  $Nn$  au numérateur à la place du  $N$ . Nous ne réalisons pas cette étude car, la borne étant explosive en  $t$ , l'amélioration obtenue ne serait pas réellement significative. Toutefois, dans la suite, nous comparons ce filtre avec les autres sur des applications, afin d'évaluer empiriquement, si le temps de calcul supplémentaire qu'il requiert se répercute sur la précision.



# **Troisième partie**

## **Applications**



# Chapitre 8

## Applications sur des simulations

### 8.1 Problèmes de filtrage

Pour les simulations de cette partie, la nature statistique des bruits est toujours supposée connue. Les fonctions d'évolution et d'observation du système dynamique sont elles aussi connues.

#### 8.1.1 Système linéaire

Le système considéré vérifie les hypothèses assurant la convergence du filtre de Kalman. Le filtre optimal est donc calculable, il permettra ainsi d'évaluer les performances de nos filtres.

Soit le système

$$\begin{cases} x_{t+1} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.2 \\ 0.5 & -0.5 \end{bmatrix} x_t + 0.2\varepsilon_t \\ y_t &= [1 \ 1]x_t + 0.1\eta_t \end{cases}$$

où  $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}_2(0, I)$  et  $\eta_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . En rajoutant, l'hypothèse  $x_0 \sim \mathcal{N}_2(0, 0.1)$  on est dans le cadre où le filtre de Kalman est optimal. Il est donc naturel de l'utiliser comme référence.

On s'est intéressé à l'estimation de la densité pour l'instant  $t = 50$ . Kalman étant optimal, la vraie densité est donc connue. Il s'agit d'une loi gaussienne dont l'espérance et la variance sont fournies par le filtre de Kalman.

Nous étudions le comportement de l'estimation pour le filtre à convolution avec

ré-échantillonnage. Le tableau suivant rapporte les erreurs  $L_1$  obtenues en fonction du nombre de particules utilisées.

Nombre de particules	Erreur $L_1$ estimée
1000	0.3843
5000	0.3244
10000	0.2821
20000	0.2609
50000	0.2428
100000	0.2366
1000000	0.0695

Afin de faciliter l'interprétation de ces résultats, les estimations de densité de quelques cas sont représentées sur la figure 8.1.

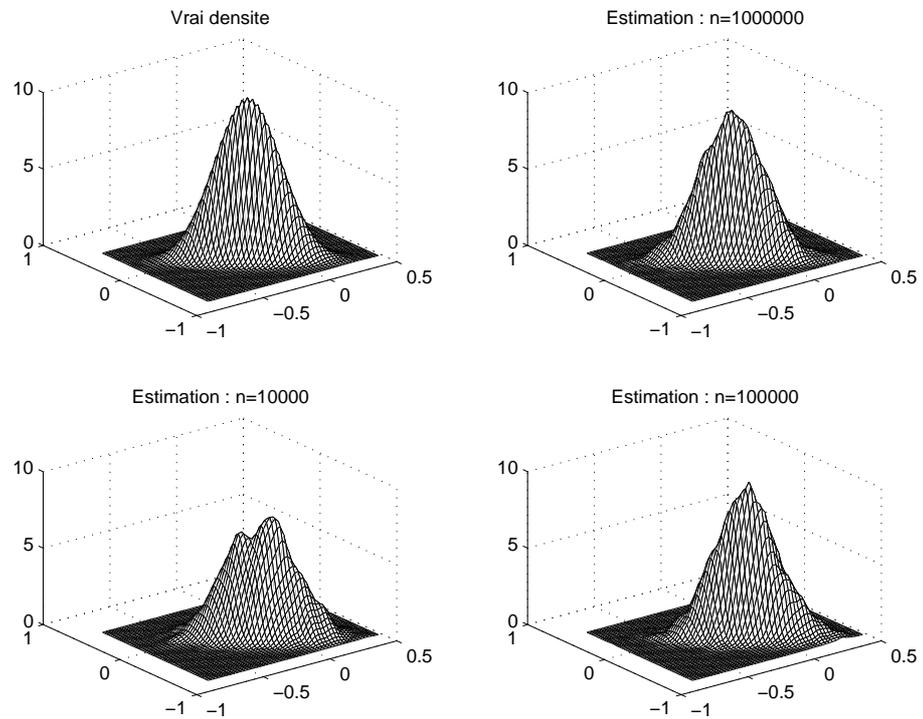


FIG. 8.1 – Estimation du filtre optimal à l'instant  $t = 50$

La convergence peut sembler assez lente, mais sur la figure 8.1 on constate que le support de la densité est correct même avec peu de particules. Il est donc certainement possible d'améliorer les performances en travaillant sur le choix de la largeur de la fenêtre  $h$ .

### 8.1.2 Systèmes non linéaires

#### Exemple 1

Le système dynamique ci-dessous a été considéré par Lo([99]) et Yee([133]) :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= 1.1 \exp(-2x_t^2) - 1 + 0.5 \times \varepsilon_t \\ y_t &= x_t^3 + 0.1 \times \eta_t \end{cases} \quad (8.1)$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.1^2)$  et  $\varepsilon_t, \eta_t$  des bruits gaussiens centrés réduits indépendants. Pour évaluer les performances de leurs filtres à base de réseaux de neurones, Lo et Yee calculent la racine de l'erreur quadratique moyenne (RMSE) sur  $N = 500$  trajectoires de  $t = 120$  pas de temps :

$$RMSE = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left( \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}\|^2 \right)^{1/2} \right)$$

Pour cet exemple, les RMSE sont aussi calculées sur  $N = 500$  trajectoires de  $t = 120$  pas de temps. Lo utilise pour les meilleures situations, 200000 données d'apprentissage sur un réseau récurrent complètement inter-connecté (NFFN, table 8.1) et un réseau récurrent en anneau (NFRN, table 8.1), tous deux à 8 neurones. Yee([133]) a aussi traité cet exemple avec un réseau à bases radiales (RBFN, table 8.1) mais seulement avec 800 données d'apprentissage et une mémoire  $T = 2$ . De plus, du travail de Yee, il ressort qu'en prenant un réseau avec une mémoire  $T = 1$  le résultat obtenu est sensiblement identique au cas  $T = 2$ . En fait, cet exemple relève plus de l'inversion de fonction, mais nous l'avons tout de même utilisé pour comparer le comportement d'une large gamme de filtres. Les autres filtres considérés sont le filtre de Kalman étendu (FKE), ainsi qu'une de ses versions robustifiées, le filtre de Kalman étendu itéré (FKEI) puis la plupart des filtres particuliers évoqués précédemment : le filtre de Monte Carlo pondéré (MCP), le filtre de Monte Carlo pondéré à mémoire tronquée (MCPT), le filtre particulier avec interaction (IPF) et le filtre avec interaction post-régularisé (PostReg). Pour nos filtres, nous avons testé le filtre par convolution simple (CF), le filtre par convolution à mémoire tronquée (CFT), le filtre avec sélection (CFS)

et le filtre par convolution avec ré-échantillonnage (CFR).

Pour tous les filtres particuliers et nos filtres par convolution, nous avons utilisé seulement 500 particules, un noyau  $K$  gaussien et une fenêtre  $h_n = std(\tilde{x}^i)n^{-0.2}$ . Pour les filtres à mémoire tronquée nous avons pris  $T = 2$  comme Yee. Pour le filtre avec sélection, nous avons pris,  $\epsilon = 0.1$ , pour la largeur du tube. Les résultats obtenus pour tous les filtres sont rassemblés dans la table 8.1 ci-dessous.

Filtres	RMSE	Filtres	RMSE	Filtres	RMSE
FKE	1.3905	IPF	0.2135	CFR	0.2199
FKEI (Lo)	0.2806	PostReg	0.2137	CFS	0.2191
RBFN (Yee)	0.2260	MCP	div	CF	0.3791
NFFN (Lo)	0.2120	MCPT	div	CFT	0.2761
NFRN (Lo)	0.2122				

TAB. 8.1 – RMSE pour l'exemple 1

D'après la table 8.1, les réseaux récurrents de Lo obtiennent les meilleurs résultats, suivis de très près par les filtres particuliers avec ré-échantillonnages ou sélection et le réseau de neurones à base radiale de Yee. Les filtres particuliers classiques divergent complètement, le filtre de Kalman étendu est totalement en échec, et sa version robustifiée, le filtre de Kalman étendu itéré, s'en tire correctement.

Le temps requis par l'apprentissage, avec 200000 observations, des réseaux de neurones récurrents ne justifie pas, à notre avis, le gain obtenu par rapport aux filtres particuliers, d'autant plus que le modèle (8.1) ici considéré est relativement simple, invariant dans le temps et à une dimension. Pour un modèle plus complexe, il est légitime de craindre une augmentation significative du temps d'apprentissage du réseau. Les approches particulières sont, par contre, peu sensibles à ce facteur, puisqu'il suffit d'augmenter le nombre de particules, ce qui n'engendre pas d'augmentation de temps de calcul comparable à celle nécessaire aux réseaux récurrents.

De plus, les filtres particuliers sont calculés seulement avec 500 particules, il est donc certainement possible de se rapprocher des performances des réseaux récurrents en augmentant le nombre de particules. Nous n'avons pas poussé davantage l'étude de cet exemple car la nature bijective de la fonction d'observation  $h$  réduit son intérêt. Toutefois, il ressort de cet exemple que les méthodes particulières sont tout à fait compétitives avec les techniques employées généralement en pratique.

**Exemple 2**

Soit le système non linéaire considéré par Mendès & al.([103]), Kitagawa([87], [88]), Doucet([56],[58]), . . .

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 5)$ . Nous comparons les filtres particulières et nos filtres à convolution sur trois situations différentes :

- Cas 1 :  $v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $w_t \sim \mathcal{N}(0, 0.1^2)$
- Cas 2 :  $v_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$
- Cas 3 :  $v_t \sim \mathcal{N}(0, 10)$  et  $w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$

Les résultats sont présentés dans les tables 8.2, 8.3 et 8.4. Ce sont les moyennes des erreurs quadratiques, MSE, sur  $N = 100$  trajectoires avec  $t = 120$  pas de temps, suivant le nombre de particules employées : 25, 50, 100, 500, 1000, 2500 et 5000.

$$MSE = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \|x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}\|^2 \right)$$

Pour tous les filtres à convolution, nous avons utilisé un noyau  $K$  gaussien et une fenêtre  $h_n = std(\tilde{x}^i)n^{-0.2}$ . Pour les filtres à mémoire tronquée nous avons pris  $T = 3$  et pour le filtre avec sélection, nous avons pris,  $\epsilon = 1$ , pour la largeur du tube.

Nb particules	MCP	MCPT	IPF	Post-Reg	CF	CFT	CFS	CFR
25	div	div	div	div	div	div	div	23.62
50	div	div	div	div	div	15.34	10.87	14.81
100	div	div	div	div	14.15	13.82	9.50	10.30
500	div	div	div	div	11.69	10.43	9.26	8.08
1000	div	div	div	div	11.80	9.95	9.23	7.91
2500	div	div	div	div	10.75	9.27	9.23	7.59
5000	div	div	div	div	10.96	9.01	9.26	7.66

TAB. 8.2 – Cas 1 : Moyennes des erreurs quadratiques

Il ressort de l'examen des résultats du tableau 8.2, comme on pouvait s'y attendre, que les filtres particuliers sont mis en défaut lorsque les observations sont faiblement bruitées. Nos filtres par convolution, par contre, se comportent correctement excepté lorsque le nombre de particules est très faible.

Nb particules	MCP	MCPT	IPF	Post-Reg	CF	CFT	CFS	CFR
25	22.60	18.75	23.93	19.37	18.82	18.22	<b>15.31</b>	18.92
50	19.04	15.36	16.62	14.14	16.78	15.04	<b>12.48</b>	15.02
100	16.09	13.21	13.23	11.31	14.77	13.23	<b>10.92</b>	12.59
500	12.93	11.02	<b>10.26</b>	10.36	13.45	11.49	10.58	10.49
1000	12.13	10.50	10.18	<b>10.15</b>	13.51	11.39	10.47	10.26
2500	11.24	10.14	10.14	<b>10.13</b>	13.25	10.97	10.51	10.15
5000	10.89	10.11	10.12	10.18	13.57	10.95	10.52	<b>10.10</b>

TAB. 8.3 – Cas 2 : Moyennes des erreurs quadratiques

Nb particules	MCP	MCPT	IPF	Post-Reg	CF	CFT	CFS	CFR
25	53.06	div	44.84	46.36	41.99	37.84	<b>32.76</b>	37.50
50	48.18	40.43	33.62	32.97	36.52	32.82	<b>25.61</b>	29.48
100	44.99	36.32	27.91	27.62	33.77	29.79	<b>23.51</b>	27.43
500	39.11	29.67	23.80	<b>22.88</b>	31.51	26.72	23.31	23.38
1000	36.67	26.84	22.95	<b>22.31</b>	31.43	25.69	23.02	23.46
2500	32.86	25.23	<b>22.57</b>	22.66	33.23	24.92	22.90	22.70
5000	30.98	24.05	22.34	22.45	33.31	24.38	22.95	<b>22.33</b>

TAB. 8.4 – Cas 3 : Moyennes des erreurs quadratiques

On constate que le filtre à sélection, CFS, obtient les meilleurs résultats pour de faibles nombres de particules. Cependant, il ne s'améliore plus significativement au-delà de 100 particules, cela est certainement dû au fait que la largeur du tube est fixée à 1. De plus, il requiert beaucoup plus de temps de calcul que tous les autres filtres.

Plus généralement, on remarque que les filtres à convolution offrent de meilleures performances que les filtres particuliers, pour les petits nombres de particules. Les performances deviennent comparables lorsque le nombre de particules augmente.

L'intérêt principal de nos filtres par convolution, par rapport aux filtres particulières, est de ne pas exiger la connaissance de la forme analytique de la vraisemblance des observations. Cet affaiblissement des hypothèses, comme on a pu le voir au travers des exemples précédents, ne semble pas affecter significativement les performances. De plus, pour le traitement de ces exemples, aucun effort n'a été fait pour le choix du  $h$ . En travaillant sur ce point, il est certainement possible d'améliorer encore les performances des filtres par convolution.

### 8.1.3 Choix de l'estimateur de l'état

Différents estimateurs pour la valeur de l'état ont été proposés au quatrième chapitre : l'espérance conditionnelle, le mode conditionnel et la médiane conditionnelle. Ces trois estimateurs, calculés à partir du filtre avec ré-échantillonnage, sont comparés sur le même système dynamique que l'exemple précédent :

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 5)$ ,  $v_t, w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Le filtre à convolution avec ré-échantillonnage est construit avec un noyau gaussien et une fenêtre  $h_n = \text{std}(\tilde{x}^i)n^{-0.2}$ . Nous avons évalué les trois estimateurs, sur 500 trajectoires de 100 pas de temps, sous deux critères : l'erreur quadratique moyenne, MSE (table 8.5) et l'erreur absolue moyenne, MAE (table 8.6),

$$MAE = \frac{1}{t} \sum_{k=1}^t \left( \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |x_{i,k} - \hat{x}_{i,k}| \right).$$

Nb particules	Espérance	Médiane	Mode
50	15.5084	18.5363	20.1440
100	13.1587	16.0070	17.7311
500	11.1939	14.1842	15.8261
1000	10.8949	13.7804	15.3724
5000	10.6176	13.4938	15.0608

TAB. 8.5 – Moyennes des erreurs quadratiques

Nb particules	Espérance	Médiane	Mode
50	1.9910	1.8211	1.8993
100	1.8332	1.6441	1.7116
500	1.6746	1.4885	1.5372
1000	1.6444	1.4568	1.5023
5000	1.6066	1.4260	1.4706

TAB. 8.6 – Moyennes des erreurs absolues

Les résultats des tableaux 8.5 et 8.6, sont en accord avec les propriétés intrinsèques de ces estimateurs, à savoir que l'espérance minimise l'erreur quadratique moyenne et la médiane minimise l'erreur absolue moyenne. Il est donc raisonnable de penser que les estimations des densités fournies par le filtre sont de bonne qualité.

Ces résultats illustrent de plus, le fait que l'estimateur de l'état doit nécessairement être choisi en fonction du problème considéré.

### 8.1.4 Filtre particulière avec la vraisemblance estimée

Lors du chapitre 7, relatif au positionnement de nos filtres à convolution par rapport aux filtres particuliers, nous avons proposé une adaptation du filtre particulière avec interaction (IPF) au cas où la vraisemblance des observations est inconnue. Cette dernière application de type filtrage simple, toujours sur le même système, lui est consacrée :

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 5)$ ,  $v_t, w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ . Nous comparons donc le comportement de l'IPF, l'IPFm sa version modifiée avec vraisemblance estimée et le filtre à convolution avec ré-échantillonnage (CFR). Dans tous les cas, les noyaux utilisés sont gaussiens avec  $h_n = \text{std}(\tilde{x}^i)n^{-0.2}$ . Les résultats présentés dans le tableau 8.7, sont les moyennes des erreurs quadratiques sur  $N = 500$  trajectoires de  $t = 100$  pas de temps, suivant le nombre de particules utilisées.

Nb particules	IPF	IPFm	CFR
50	16.6865	17.3465	14.4432
100	12.4404	12.7122	12.3516
500	10.4035	10.5074	10.6455
1000	10.2259	10.2277	10.2820

TAB. 8.7 – Moyennes des erreurs quadratiques

Les performances affichées (table 8.7) par le filtre IPFm sont tout à fait convenables. Mais sur cet exemple, on ne peut pas affirmer que le temps de calcul supplémentaire qu'il requiert soit justifié par rapport à ses performances. Une étude plus approfondie, sur différents modèles, semble nécessaire pour l'établir de manière précise

## 8.2 Problèmes d'estimation de paramètres en cours de filtrage

Dans ce sous-chapitre, nous allons comparer les performances d'estimation complémentaires de paramètres inconnus selon les trois approches envisagées au chapitre 5 : le maximum de vraisemblance, les moindres carrés et la technique bayésienne. De plus, en préambule, nous étudions l'approche empirique par minimisation d'une fonction de coût. De cette étude préliminaire, il ressort que l'emploi de techniques d'optimisation stochastiques nécessite de très gros temps de calculs. Pour contourner ce problème, nous appliquons la technique avec "aléas figés" pour construire les estimateurs du maximum de vraisemblance et des moindres carrés. De ce fait (cf. chapitre 5), seuls les filtres à convolution à mémoire complète et à mémoire tronquée restent utilisables. Leurs problèmes de divergence en temps long ne constituent pas ici une difficulté puisque l'optimisation est systématiquement réalisée sur un nombre  $T$  fixé d'observations.

### 8.2.1 Minimisation stochastique d'une fonction de coût

Considérons dans cette partie un système de la forme suivante :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= f_t(x_t, \theta, \varepsilon) \\ y_t &= h_t(x_t) + \eta_t \end{cases} \quad (8.2)$$

Soit  $\hat{x}_t(\theta)$  un estimateur de  $\mathbb{E}[x_t|y_{1:t}, \theta]$ , ainsi la fonction de coût définie par l'expression

$$C(\theta) = \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ y_t - h_t(\hat{x}_t(\theta)) \right]^2 - \sigma_\eta^2 \right)^2$$

est naturelle. En effet, si  $x_t$  remplace  $\hat{x}_t(\theta)$ , par la loi forte des grands nombres on a que  $C \rightarrow 0$  lorsque  $T \rightarrow \infty$ . Comme il est raisonnable de supposer que  $\hat{x}_t(\theta)$  est d'autant plus proche de  $x_t$  que  $\theta$  est proche de sa vraie valeur, il semble donc pertinent de minimiser  $C(\theta)$ . Or, cette fonction est aléatoire puisque les  $\hat{x}_t(\theta)$  sont aléatoires. Il faut donc utiliser des algorithmes stochastiques pour minimiser  $\mathbb{E}[C(\theta)]$ .

Dans les situations réelles, les bruits sur le système ne sont souvent pas connus, surtout pour le modèle d'état. Il est en effet, plus fréquent de connaître les caractéristiques de l'erreur d'observation ( par exemple, celles de l'erreur d'un appareil de mesure ). Pour nous situer dans ce contexte, nous avons supposé que les bruits sont blancs et gaussiens, que la variance de  $\varepsilon_t$  (le bruit sur le modèle d'état) est inconnue et celle de  $\eta_t$  (bruit d'observation) est connue.

### Estimation de la variance du bruit sur le modèle d'état

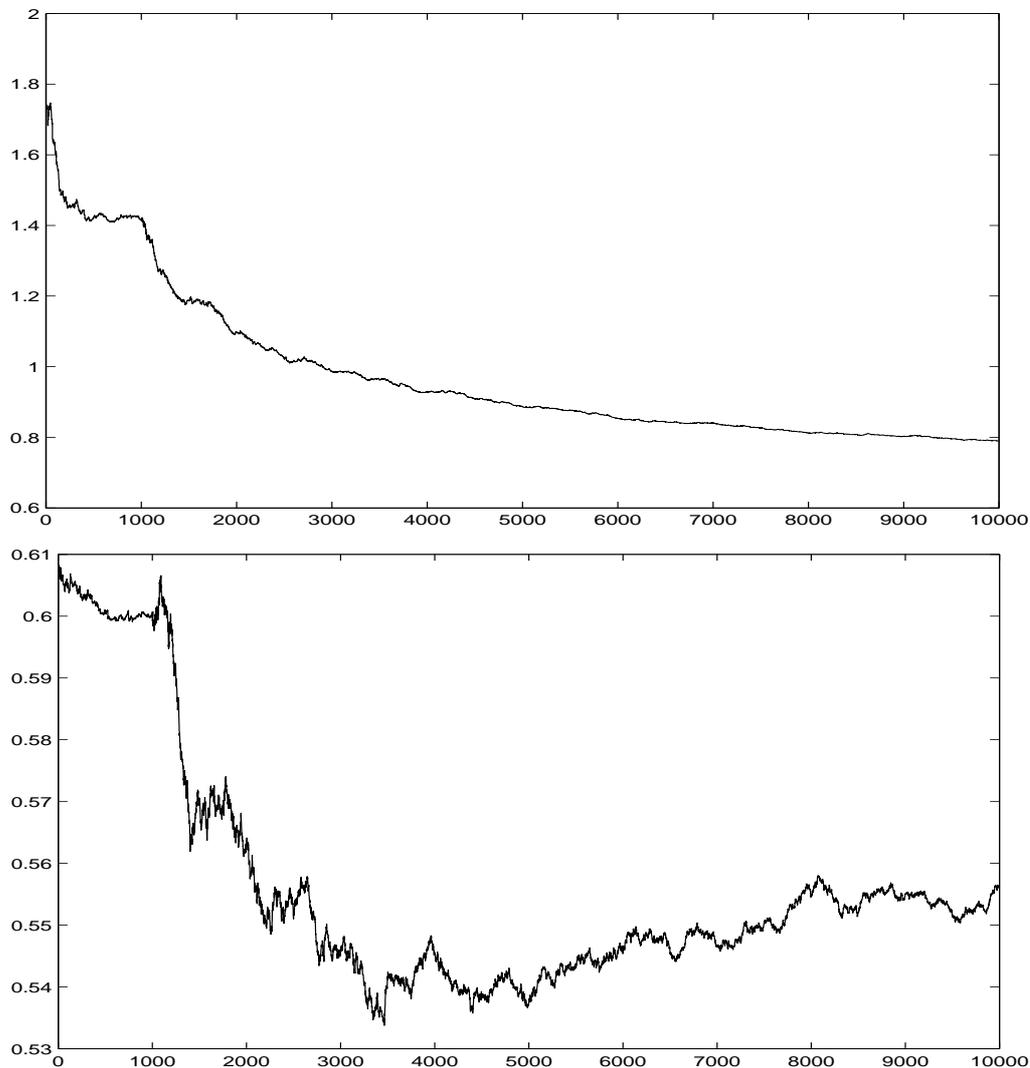
Le système considéré comme support d'application est celui de Lo([99]) :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= 1.1 \exp(-2x_t^2) - 1 + \theta \times \varepsilon_t \\ y_t &= x_t^3 + 0.1 \times \eta_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.1^2)$  et  $\varepsilon_t, \eta_t$  des bruits gaussiens centrés réduits indépendants. Le paramètre inconnu est  $\theta = \sigma_\varepsilon$ . La vraie valeur de  $\theta$  est  $\theta_0 = 0.5$ .

Dans un premier temps,  $C(\theta)$  est minimisée par la procédure de Kiefer-Wolfowitz([86]) pour  $T = 50$ . Les  $\hat{x}_t(\theta)$  sont obtenus suivant le filtre par convolution simple avec 800 particules et un noyau gaussien.

Les résultats des deux situations étudiées, un point de départ éloigné de la vraie valeur et un point de départ proche de la vraie valeur sont représentés sur les figures 8.2. L'abscisse des figures représente les itérations de l'algorithme de minimisation.

FIG. 8.2 – Estimation de  $\sigma_\varepsilon$ , départ  $\hat{\sigma}_\varepsilon=2$  et  $\hat{\sigma}_\varepsilon=0.6$ 

Dans les deux cas le processus semble aller dans la bonne direction mais il est très lent. Il faut toujours compter plusieurs jours de calcul, pour un processeur de type Pentium IV à 2Ghtz, pour effectuer les 10000 itérations, sans être sûr de la convergence. Comme l'objectif est de travailler en ligne nous ne pouvons pas utiliser cette méthode.

Nous avons alors mis en place une procédure de minimisation stochastique plus raffinée, la méthode de Fabian([61]), détaillée en annexe. Comme on peut le

voir sur la figure (8.3) la convergence est bien plus nette.

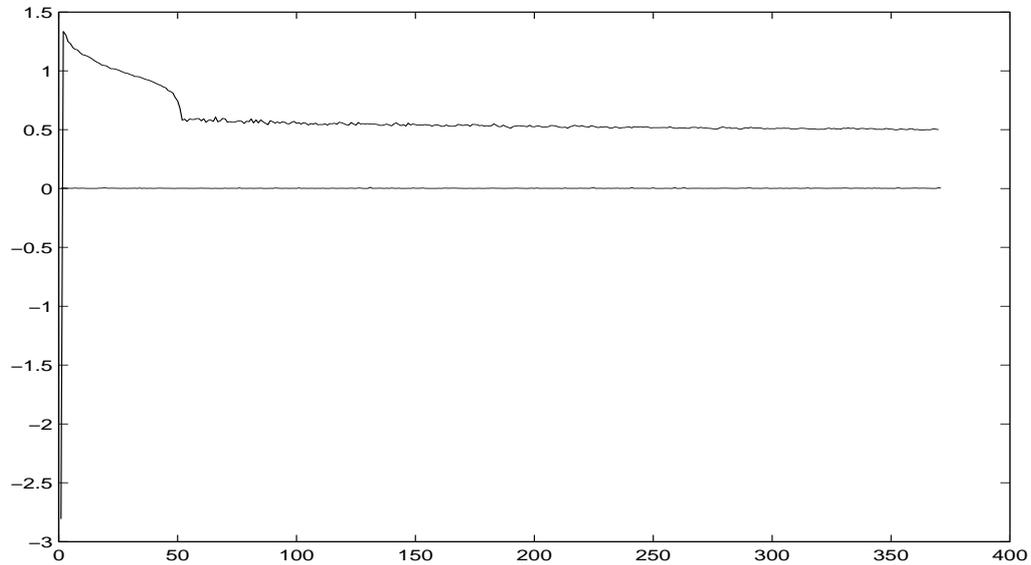


FIG. 8.3 – Estimation de  $\sigma_\varepsilon$ , départ  $\hat{\sigma}_\varepsilon=2$

Cependant, le temps de calcul est toujours assez long compte tenu de la complexité des itérations de la méthode de Fabian. De plus, il faut choisir plusieurs paramètres de réglage très influents sur la vitesse de convergence et la qualité du résultat.

### 8.2.2 Estimateur des moindres carrés conditionnels

Le système considéré est encore celui de Lo([99]) avec variance d'état inconnue :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= 1.1 \exp(-2x_t^2) - 1 + \theta \times \varepsilon_t \\ y_t &= x_t^3 + 0.1 \times \eta_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.1^2)$  et  $\varepsilon_t, \eta_t$  des bruits gaussiens centrés réduits indépendants. La vraie valeur de  $\theta$  est encore  $\theta_0 = 0.5$ .

L'objectif est de minimiser la fonction suivante

$$\hat{Q}_{T,n}(\theta) = \sum_{t=1}^T (y_t - m_{t,n}(\theta))^2$$

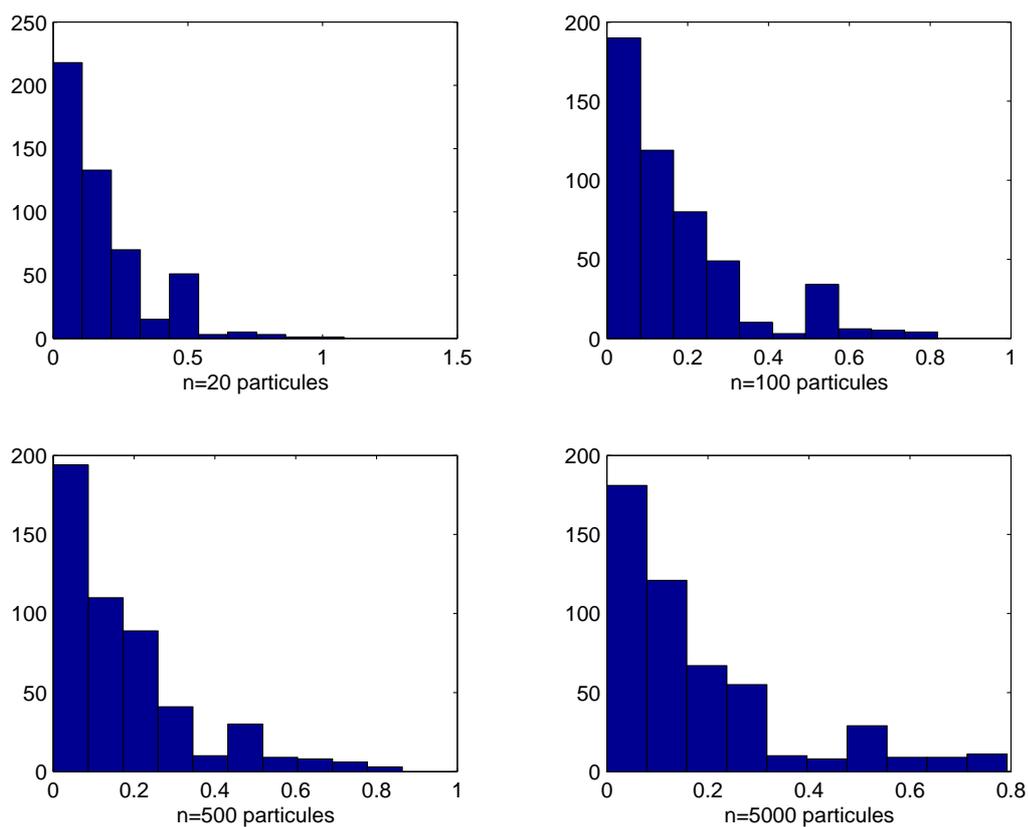
avec  $m_{t,n}(\theta)$  l'estimation de  $\mathbb{E}[y_t | y_{1:t-1}]$  fournie par un filtre à convolution à  $n$  particules. Cette fonction de coût  $\widehat{Q}_{T,n}$  et l'estimateur  $m_{t,n}(\theta)$  sont plus amplement détaillés au cinquième chapitre.

Comme la fonction  $\theta \mapsto m_{t,n}(\theta)$  dépend des particules, elle est aléatoire. Pour contourner les difficultés inhérentes aux algorithmes de minimisation stochastiques, illustrées dans la section précédente, nous utilisons ici la technique de minimisation avec “aléas figés” exposée au cinquième chapitre. Avant de donner les résultats, nous en rappelons rapidement le principe, pour ce cas particulier. Il est toujours supposé que les variables aléatoires  $\varepsilon_t$  et  $\eta_t$  sont indépendantes entre elles et de tout le reste. Donc, pour une valeur de  $\theta$  donnée, les bruits,  $\varepsilon_1^i, \dots, \varepsilon_t^n$  et  $\eta_t^1, \dots, \eta_t^n$  générés pour construire les  $n$  trajectoires, nécessaires au filtre à mémoire complète, sont théoriquement valides et utilisables (même loi) pour une autre valeur de  $\theta$ . Ainsi en conservant ces valeurs pour les bruits, la fonction  $\theta \mapsto m_{t,n}(\theta)$  n'est plus aléatoire, il est alors possible de la minimiser avec les algorithmes classiques. Intuitivement, cela peut s'interpréter comme une minimisation sur une réalisation du hasard donnée.

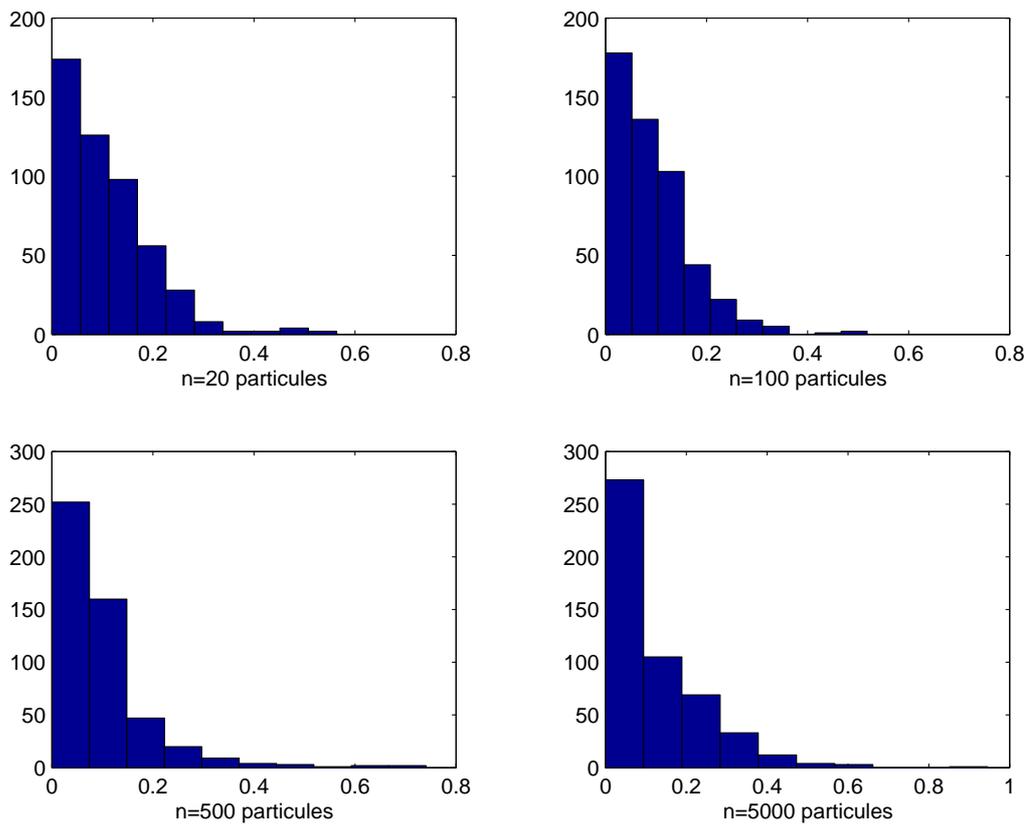
A présent que le principe de la minimisation est rappelé, précisons le contexte des simulations. L'initialisation de l'algorithme de minimisation, fonction native de Matlab<sup>®</sup>, requiert la borne minimale et maximale pour  $\theta$ ; nous avons pris 0 et 2, la vraie valeur étant  $\theta_0 = 0.5$ .

Afin de caractériser leur impact, nous avons fait varier  $n$ , le nombre de particules employées ainsi que  $T$ , la longueur de la trajectoire considérée. Les résultats présentés dans les tableaux, Tab. 8.8, Tab. 8.9 et Tab. 8.10, regroupent : le maximum, l'écart type et la moyenne des erreurs absolues des estimations du paramètre sur 500 trajectoires différentes, pour respectivement  $T=20$ ,  $T=50$  et  $T=100$ . Pour compléter cette description des résultats, chacun des tableaux est accompagné d'une figure, respectivement Fig. 8.4, Fig. 8.5 et Fig. 8.6, regroupant les histogrammes des erreurs absolues pour différentes valeurs de  $n$ .

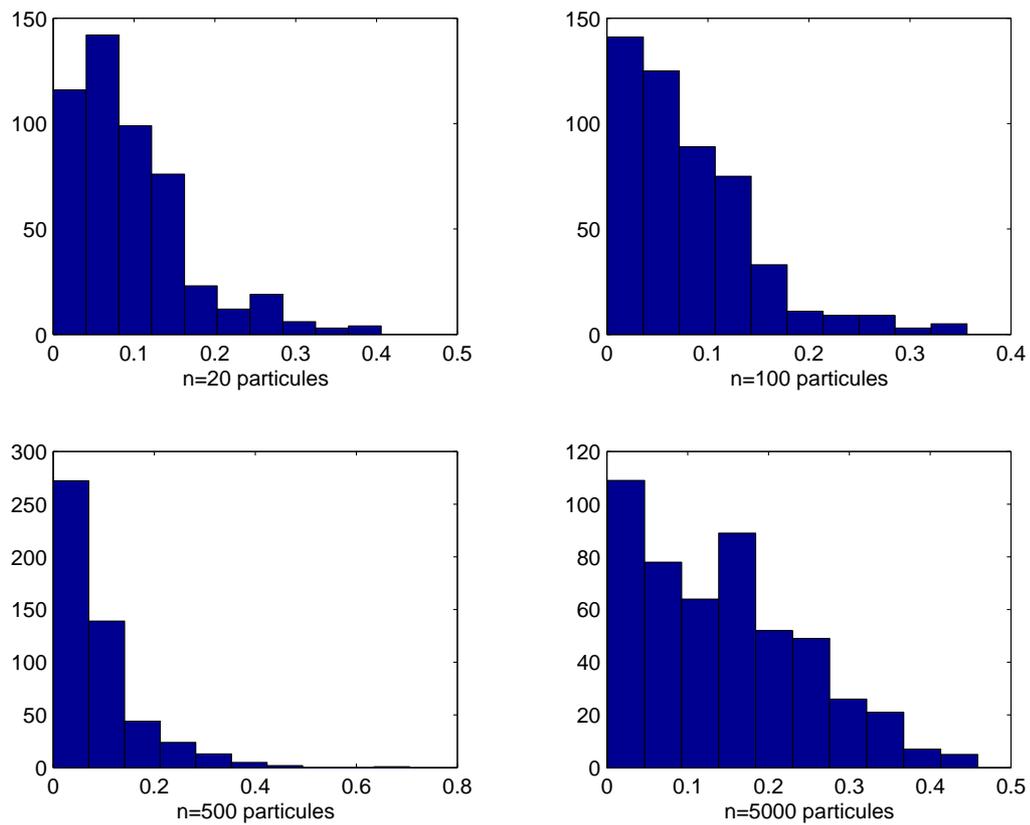
Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	1.0792	0.1706	0.1812
$n = 50$	0.7413	0.1552	0.1621
$n = 100$	0.8186	0.1605	0.1694
$n = 200$	0.8342	0.1612	0.1729
$n = 500$	0.8640	0.1722	0.1755
$n = 1000$	0.8853	0.1819	0.1866
$n = 5000$	0.7924	0.1818	0.1787

TAB. 8.8 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=20$  (MC)FIG. 8.4 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=20$  (MC)

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	0.5642	0.0889	0.1095
$n = 50$	0.4722	0.0810	0.0991
$n = 100$	0.5180	0.0753	0.0939
$n = 200$	0.6752	0.0835	0.0928
$n = 500$	0.7408	0.0993	0.0975
$n = 1000$	0.7333	0.1106	0.0985
$n = 5000$	0.9456	0.1217	0.1254

TAB. 8.9 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=50$  (MC)FIG. 8.5 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=50$  (MC)

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	0.4059	0.0731	0.0951
$n = 50$	0.3135	0.0597	0.0787
$n = 100$	0.3565	0.0658	0.0823
$n = 200$	0.4425	0.0716	0.0866
$n = 500$	0.7056	0.0854	0.0877
$n = 1000$	0.5005	0.0909	0.0992
$n = 5000$	0.4589	0.1019	0.1456

TAB. 8.10 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=100$  (MC)FIG. 8.6 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=100$  (MC)

Les résultats présentés, cf. Tab. 8.8, 8.9, 8.10 et Fig. 8.4,8.5,8.6, sont globalement en accord avec les propriétés théoriques obtenues au cinquième chapitre. Plus précisément, la qualité des estimations s'améliore lorsque la taille de la mémoire  $T$  augmente, mais ce n'est pas clairement le cas lorsque le nombre de particules  $n$  augmente, alors que ça devrait l'être. En effet, il apparaît une dégradation lorsque le nombre de particule dépasse 1000. Plusieurs causes peuvent expliquer ce phénomène, le choix du  $h_n$  n'est pas optimal et est peut être mal adapté pour de grands  $n$ , le filtre à mémoire complète se dégrade peut être trop pour  $T$  grand. Cependant, la qualité des estimations demeure correcte dans les différents cas de figures et le temps de calcul requis est sans comparaison avec les minimisations stochastiques, pour lesquelles il faut compter plusieurs jours de calculs pour une estimation.

L'intérêt de cette technique d'estimation, les moindres carrés conditionnels avec "aléas figés", est donc double. D'une part, les estimations obtenues sont correctes et d'autre part, le temps de calcul est tout à fait acceptable.

Cependant, l'estimation est dépendante des réalisations d'erreurs particulières. La validité de l'estimation requiert une hypothèse d'ergodicité, sinon, il conviendrait de faire des estimations parallèles et de les moyennner.

### 8.2.3 Estimateur du maximum de vraisemblance

Le système considéré est toujours celui de Lo([99]) avec variance d'état inconnue :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= 1.1 \exp(-2x_t^2) - 1 + \theta \times \varepsilon_t \\ y_t &= x_t^3 + 0.1 \times \eta_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.1^2)$  et  $\varepsilon_t, \eta_t$  des bruits gaussiens centrés réduits indépendants. La vraie valeur de  $\theta$  est encore  $\theta_0 = 0.5$ .

L'objectif est de maximiser l'approximation de la vraisemblance suivante

$$\widehat{L}_n(\theta) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_{1:t}^i - y_{1:t}^i)$$

fournie par le filtre à convolution à mémoire complète, construite avec  $n$  particules. La fonction  $\widehat{L}_n(\theta)$  est aléatoire, d'après les mêmes considérations que pour l'estimateur des moindres carrés conditionnels, nous utilisons la technique de minimisation avec "aléas figés" exposée au cinquième chapitre. La minimisation étant effectuée sur une réalisation du hasard fixée, tous les problèmes soulevés par l'optimisation stochastique sont ainsi contournés.

Le contexte des simulations est le même que pour les moindres carrés conditionnels. L'algorithme de minimisation, fonction native de Matlab<sup>®</sup> est initialisé avec 0 et 2 comme bornes minimale et maximale pour  $\theta$ . Nous avons aussi fait varier le nombre de particules employées  $n$  et la longueur de la trajectoire considérée  $T$ . Les résultats présentés dans les tableaux, Tab. 8.11, Tab. 8.12, regroupent : le maximum, l'écart type et la moyenne des erreurs absolues des estimations sur 500 trajectoires différentes, pour respectivement  $T=20$  et  $T=50$ . Comme pour les cas précédents, chacun des tableaux est complété d'une figure, respectivement Fig. 8.7, Fig. 8.8, regroupant les histogrammes des erreurs pour différentes valeurs de  $n$ .

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	1.5000	0.1820	0.2069
$n = 50$	0.8583	0.1382	0.1717
$n = 100$	0.6924	0.1383	0.1707
$n = 200$	0.8113	0.1353	0.1683
$n = 500$	0.7848	0.1451	0.1757
$n = 1000$	0.9012	0.1545	0.1908
$n = 5000$	0.8397	0.1798	0.2235

TAB. 8.11 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=20$  (EMV)

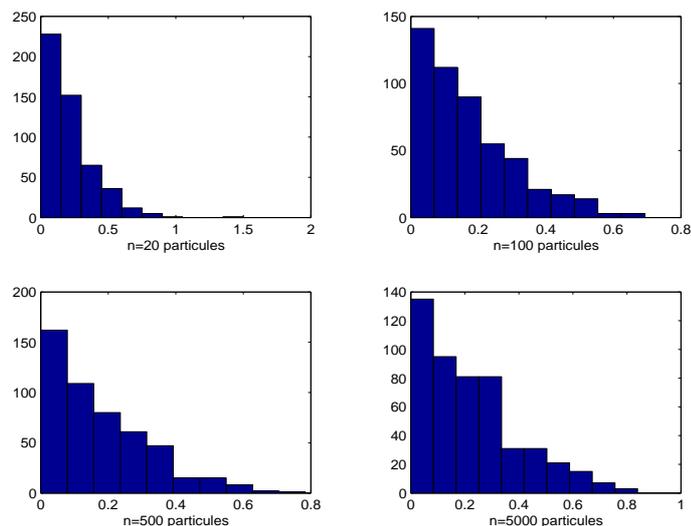
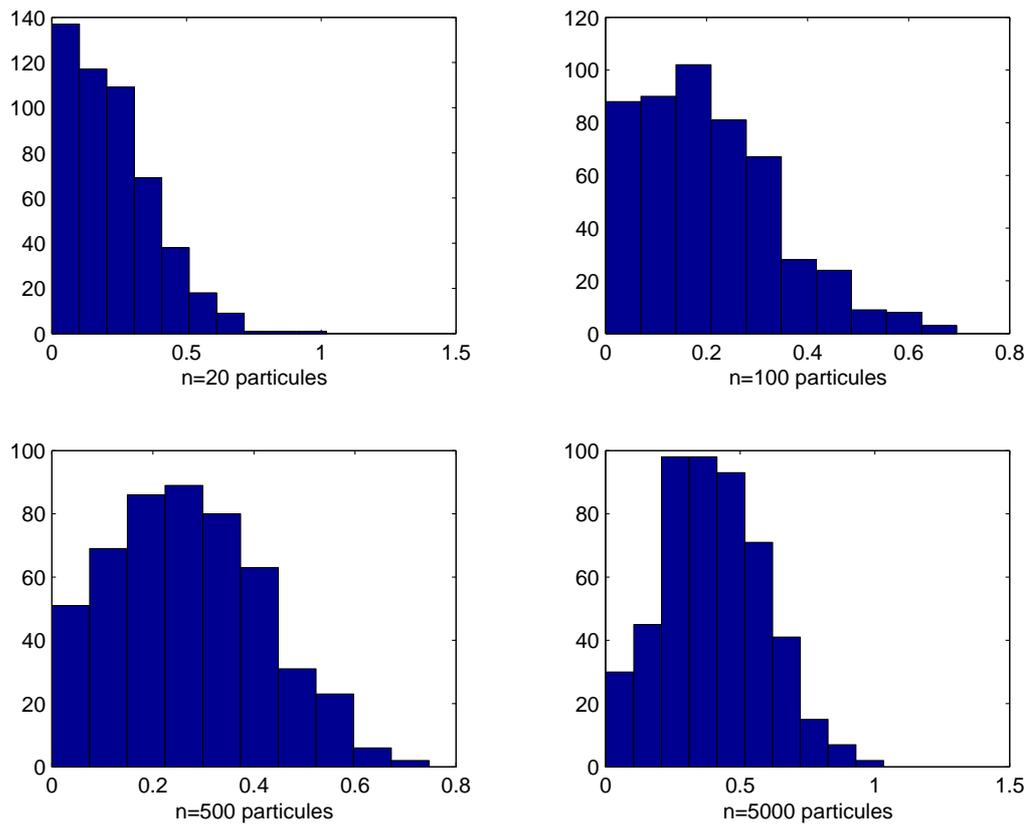


FIG. 8.7 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=20$  (EMV)

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	1.0191	0.1624	0.2268
$n = 50$	0.7588	0.1324	0.2006
$n = 100$	0.6954	0.1377	0.2070
$n = 200$	0.7090	0.1378	0.2289
$n = 500$	0.7469	0.1494	0.2699
$n = 1000$	0.7581	0.1587	0.3052
$n = 5000$	1.0323	0.1896	0.4004

TAB. 8.12 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=50$  (EMV)FIG. 8.8 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=50$  (EMV)

Les résultats, Tab. 8.11,8.12 et Fig. 8.7,8.8, sont nettement inférieurs à ceux des moindres carrés conditionnels. Ils sont d'autant plus surprenants que le fait d'avoir augmenté  $T$  n'a pas amélioré le comportement, comme on pouvait s'y attendre mais l'a dégradé.

Afin d'établir si ce phénomène est lié au filtre à mémoire complète, nous le remplaçons dans la suite par le filtre à mémoire tronquée ( 2 observations du passé), puisqu'il affiche de meilleures performances sur ce modèle (cf. Tab 8.1). Les résultats obtenus, pour l'estimateur du maximum de vraisemblance, estimé par le filtre à mémoire tronquée, sont présentés dans les tableaux 8.13, 8.14, 8.15 et leurs figures associées 8.9,8.10,8.11.

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	0.7035	0.1281	0.1534
$n = 50$	0.7826	0.1322	0.1537
$n = 100$	0.9101	0.1271	0.1749
$n = 200$	0.5000	0.1282	0.1854
$n = 500$	0.8285	0.1277	0.1956
$n = 1000$	0.5000	0.1362	0.2109
$n = 5000$	0.5000	0.1369	0.2363

TAB. 8.13 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=20$  (EMV)

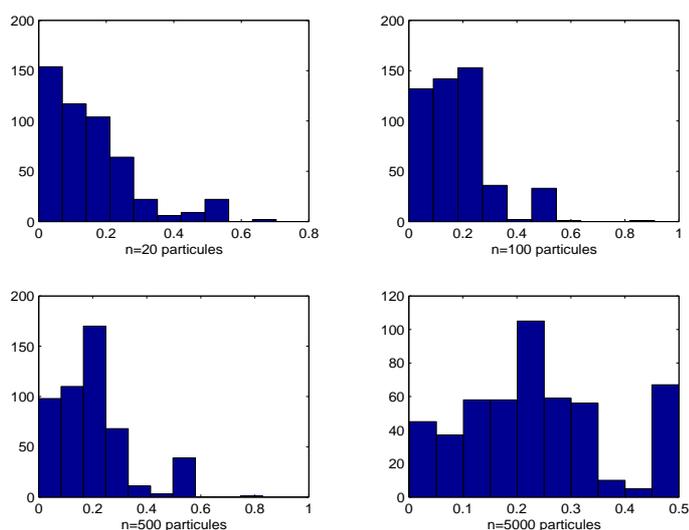
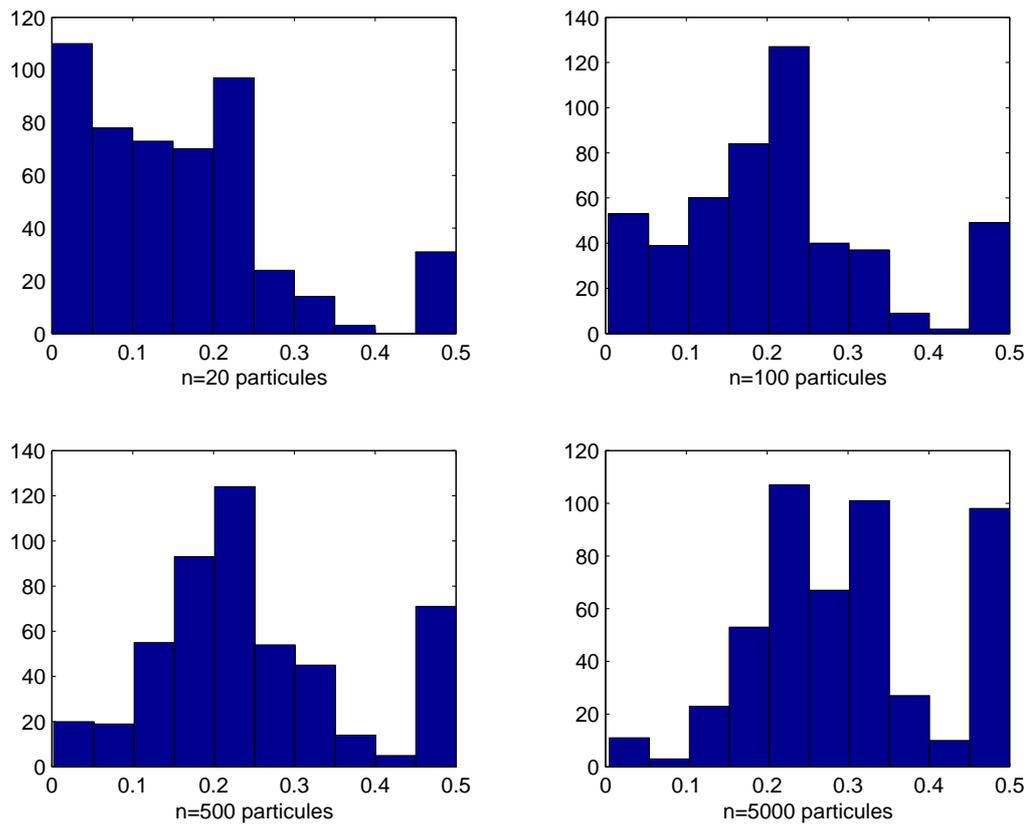
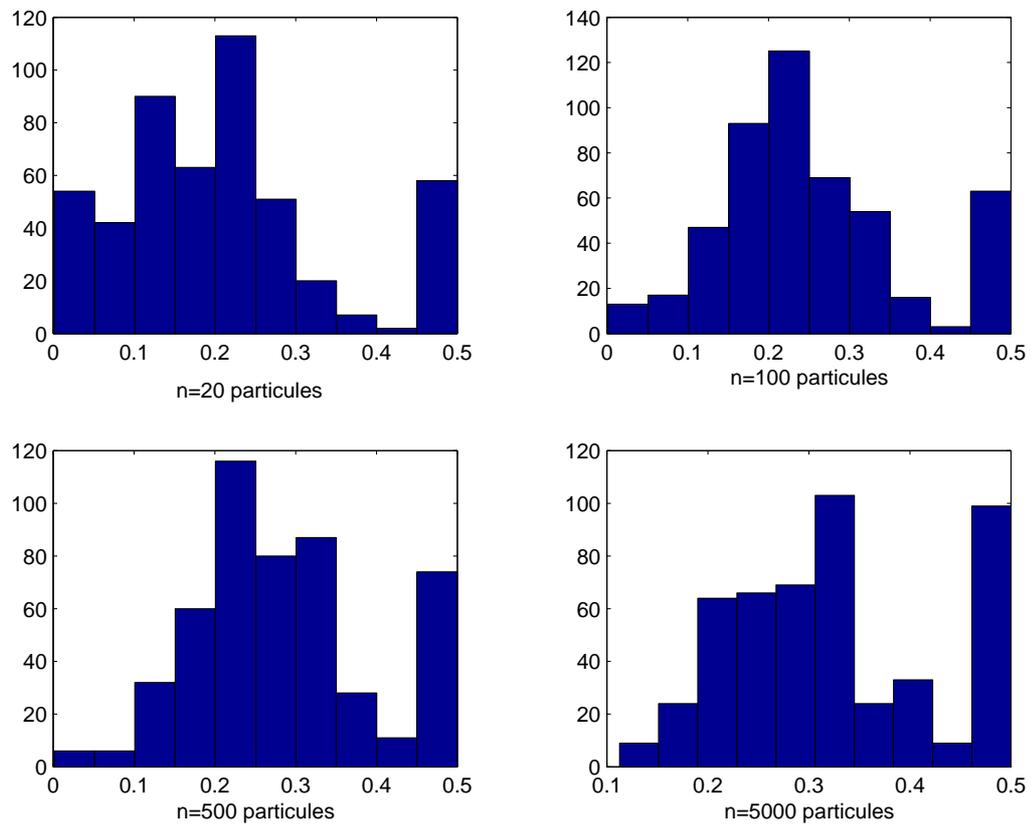


FIG. 8.9 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=20$  (EMV)

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	0.5000	0.1216	0.1588
$n = 50$	0.5000	0.1257	0.1958
$n = 100$	0.5000	0.1273	0.2128
$n = 200$	0.5000	0.1190	0.2229
$n = 500$	0.5000	0.1266	0.2517
$n = 1000$	0.5000	0.1244	0.2691
$n = 5000$	0.5000	0.1210	0.3035

TAB. 8.14 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=50$  (EMV)FIG. 8.10 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=50$  (EMV)

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	0.5000	0.1340	0.2095
$n = 50$	0.5000	0.1157	0.2186
$n = 100$	0.5000	0.1190	0.2546
$n = 200$	0.5000	0.1198	0.2646
$n = 500$	0.5000	0.1161	0.2858
$n = 1000$	0.5000	0.1108	0.3034
$n = 5000$	0.5000	0.1060	0.3258

TAB. 8.15 – Erreurs absolues sur 500 estimations avec  $T=100$  (EMV)FIG. 8.11 – Histogrammes des erreurs absolues avec  $T=100$  (EMV)

Les performances de l'estimateur obtenu par le filtre à mémoire tronquée, cf. Tab. 8.13,8.14,8.15 et Fig. 8.9,8.10,8.11, sont légèrement supérieures à celles de l'estimateur obtenu par le filtre à mémoire complète. Cependant, elles demeurent encore nettement inférieures à celles de l'estimateur des moindres carrés conditionnels et l'incohérence sur l'évolution des performances suivant les valeurs de  $n$  et  $T$  subsiste.

La technique par minimisation des moindres carrés semble donc préférable à la maximisation de la vraisemblance. Toutefois, une étude plus avancée permettrait certainement d'identifier la cause du mauvais fonctionnement du maximum de vraisemblance et d'y remédier.

### 8.2.4 Approche bayésienne

Afin de compléter la comparaison des différentes méthodes d'estimation de paramètres, nous considérons une dernière fois le système de Lo([99]) avec variance d'état inconnue :

$$\begin{cases} x_{t+1} &= 1.1 \exp(-2x_t^2) - 1 + \theta \times \varepsilon_t \\ y_t &= x_t^3 + 0.1 \times \eta_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(-0.5, 0.1^2)$  et  $\varepsilon_t, \eta_t$  des bruits gaussiens centrés réduits indépendants. La vraie valeur de  $\theta$  est encore  $\theta_0 = 0.5$ .

Pour l'estimation des paramètres par approche bayésienne, il suffit de donner une loi a priori aux paramètres inconnus. Pour garder des conditions comparables aux cas précédents, nous prenons, comme loi a priori pour  $\theta$ ,  $\mathcal{U}[0, 2]$ , la loi uniforme sur  $[0, 2]$ .

Cette approche est différente des précédentes à base d'optimisation, car le paramètre est estimé tout au long du filtrage. Ainsi la question du choix de la longueur de la trajectoire  $T$  ne se pose plus. La valeur retenue pour l'estimation de  $\theta$ , est,  $\widehat{\mathbb{E}}[\theta|y_{1:120}]$ , l'estimation de l'espérance de  $\theta$  connaissant toute la trajectoire des 120 observations. Cette estimation est obtenue par l'adaptation du filtre à convolution avec ré-échantillonnage, au cas de modèle contenant des paramètres inconnus, introduite au cinquième chapitre.

Comme pour les autres approches, le tableau 8.16, rassemble : le maximum, l'écart type et la moyenne des erreurs absolues sur les estimations de 500 trajectoires au 120<sup>ème</sup> pas de temps, suivant  $n$ , le nombre de particules utilisées. Ce tableau est complété par la figure 8.12, regroupant les histogrammes des erreurs

absolues pour différentes valeurs de  $n$ .

Nb particules	Max	Ecart-Type	Moy.
$n = 20$	1.6224	0.2154	0.2408
$n = 50$	1.1848	0.1560	0.1757
$n = 100$	1.0135	0.1127	0.1339
$n = 200$	0.9181	0.1069	0.1160
$n = 500$	0.5257	0.0764	0.0924
$n = 1000$	0.3930	0.0667	0.0836
$n = 5000$	0.4472	0.0513	0.0562

TAB. 8.16 – Erreurs absolues sur 500 estimations (Bayes)

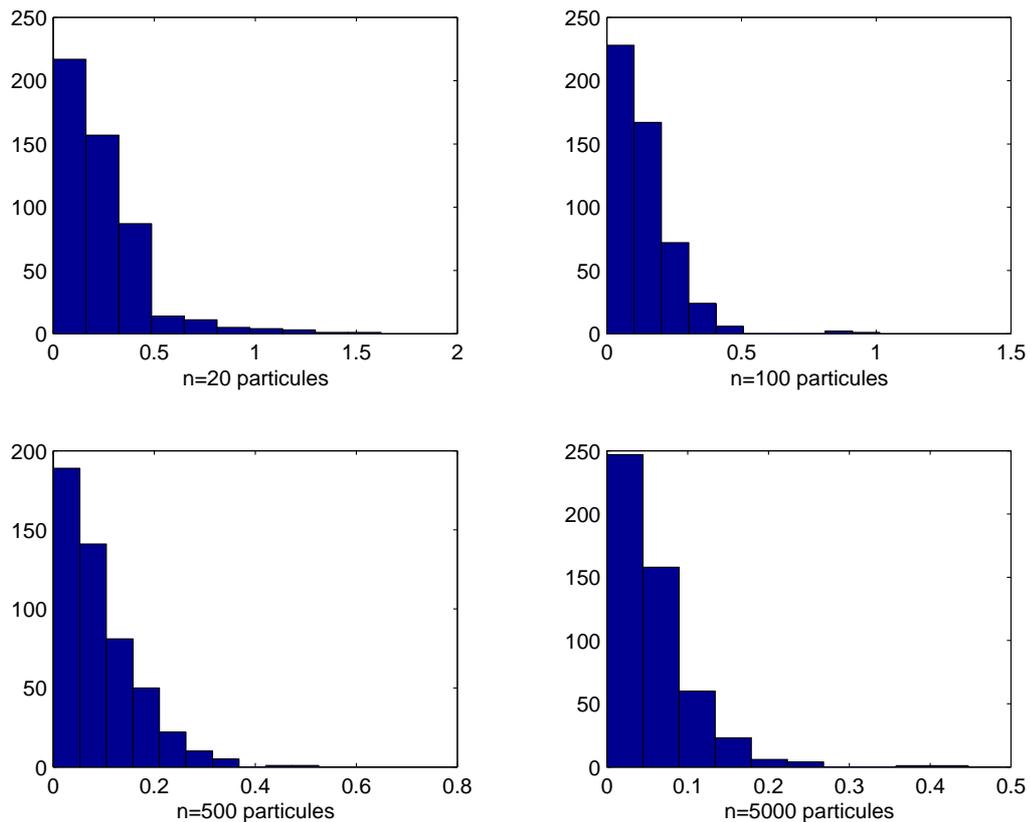


FIG. 8.12 – Histogrammes des valeurs absolues des erreurs (Bayes)

L'approche bayésienne affiche de meilleures performances, cf. Tab. 8.16 et Fig. 8.12, que toutes les approches précédemment étudiées. De plus, le comportement suivant le nombre de particules, est en totale adéquation avec les résultats théoriques puisque l'erreur baisse lorsque  $n$  augmente.

Mais cette technique bayésienne, en plus de ces bonnes performances, possède un gros avantage sur ses concurrentes, elle s'utilise "en ligne". Il est donc possible de filtrer immédiatement, sans attendre d'avoir, comme pour les autres approches, une estimation de la valeur du paramètre après  $T$  pas de temps.

Sur le plan du temps de calcul, l'introduction d'un paramètre inconnu ne ralentit quasiment pas le filtre. La méthode est encore plus rapide que les approches avec "aléas figés".

Cette approche bayésienne semble donc la mieux adaptée aux systèmes contenant des paramètres inconnus. En effet, elle les estime, tout en continuant le filtrage et sans augmentation significative du temps de calcul.

### Etudes complémentaires sur l'approche bayésienne

Afin de mieux cerner le potentiel de cette approche bayésienne, nous l'étudions de manière plus approfondie sur un autre système dynamique. Nous pourrions ainsi évaluer, sa robustesse par rapport aux nombres de paramètres inconnus, et l'impact de l'introduction de paramètres inconnus sur la qualité du filtrage.

Le système considéré est celui de l'exemple 2, aussi étudié par Mendès & al. ([103]), Kitagawa ([87],[88]), Doucet ([56],[58]), ...

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{25x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

avec  $x_0 \sim \mathcal{N}(0, 5)$ ,  $v_t, w_t \sim \mathcal{N}(0, 1)$ .

Les paramètres inconnus sont introduits progressivement dans le système. C'est toujours la procédure d'estimation bayésienne, développée au chapitre 5, qui est utilisée pour estimer ces paramètres.

#### Introduction du premier paramètre inconnu

Un paramètre inconnu est introduit dans le système qui devient alors

$$\begin{cases} x_t &= \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{\theta x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + 8 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t &= \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

La vraie valeur de  $\theta$  est  $\theta_0 = 25$ . La loi a priori pour  $\theta$  utilisée est une loi uniforme sur  $[15, 30]$ ,  $p_0(\theta) = \mathcal{U}[15, 30]$ . Les figures 8.13, 8.14, 8.15 et 8.16 représentent l'évolution, sur 500 pas de temps, de l'estimation de  $\theta_0$  fournie par le filtre avec ré-échantillonnage.

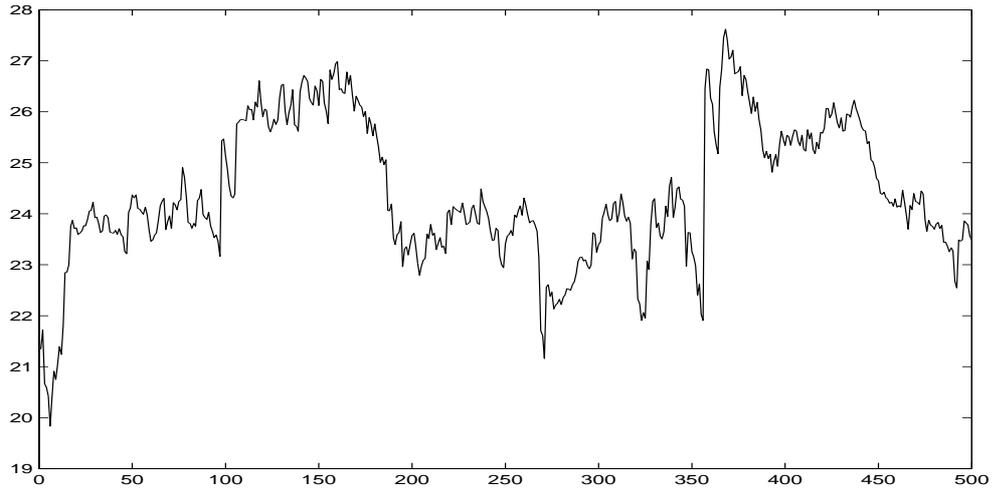


FIG. 8.13 – Estimation de  $\theta_0 = 25$ , avec  $n = 500$  particules

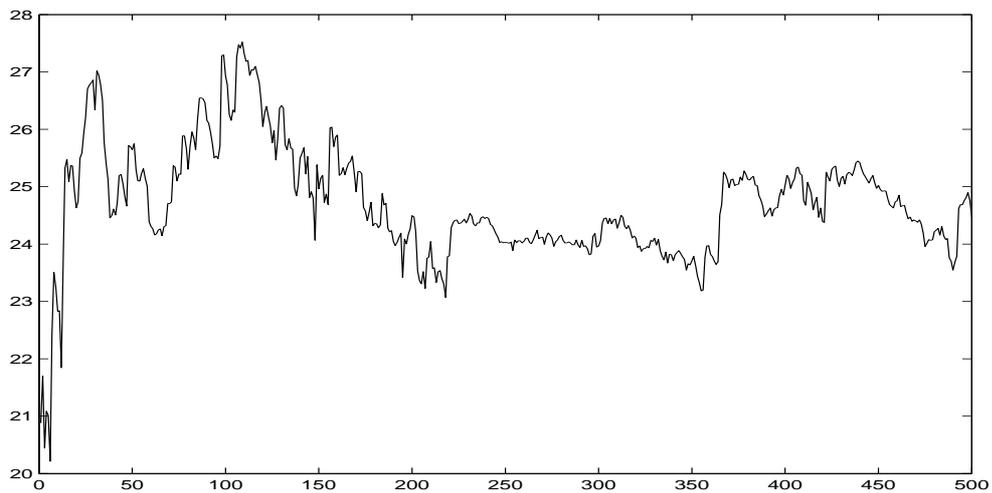


FIG. 8.14 – Estimation de  $\theta_0 = 25$ , avec  $n = 1000$  particules

FIG. 8.15 – Estimation de  $\theta_0 = 25$ , avec  $n = 2000$  particulesFIG. 8.16 – Estimation de  $\theta_0 = 25$ , avec  $n = 5000$  particules

### Introduction d'un deuxième paramètre inconnu

Après l'introduction d'un second paramètre inconnu, le système devient

$$\begin{cases} x_t = \frac{1}{2}x_{t-1} + \frac{\theta^t x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + \theta^2 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

La vraie valeur de  $\theta$  est  $\theta_0 = (\theta_0^1, \theta_0^2) = (25, 8)$ . La loi a priori pour  $\theta$  utilisée est une loi uniforme sur  $[15, 30] \times [0, 15]$ ,  $p_0(\theta^1, \theta^2) = \mathcal{U}([15, 30] \times [0, 15])$ . Les figures 8.17, 8.18, 8.19 et 8.20 représentent l'évolution, sur 500 pas de temps, des estimations de  $\theta_0^1$  et  $\theta_0^2$  fournies par le filtre avec ré-échantillonnage.

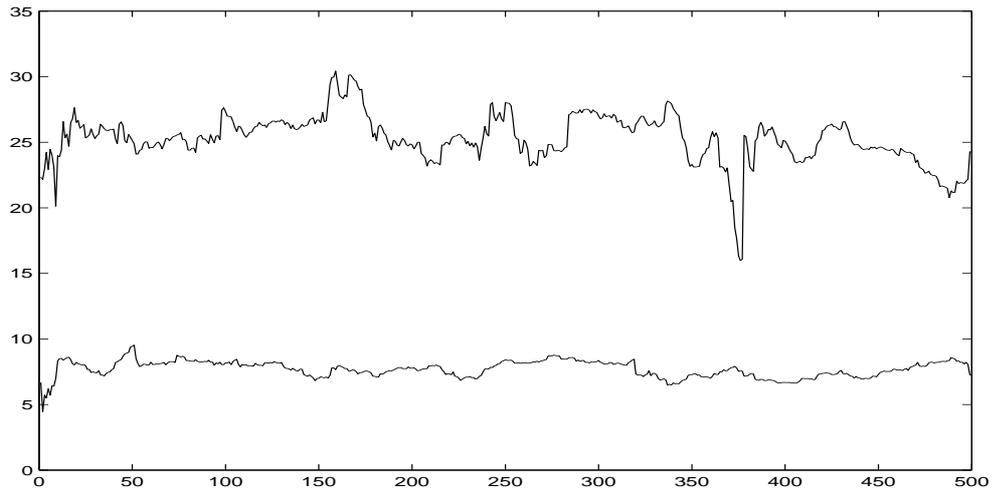


FIG. 8.17 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$  et  $\theta_0^2 = 8$ , avec  $n = 500$  particules

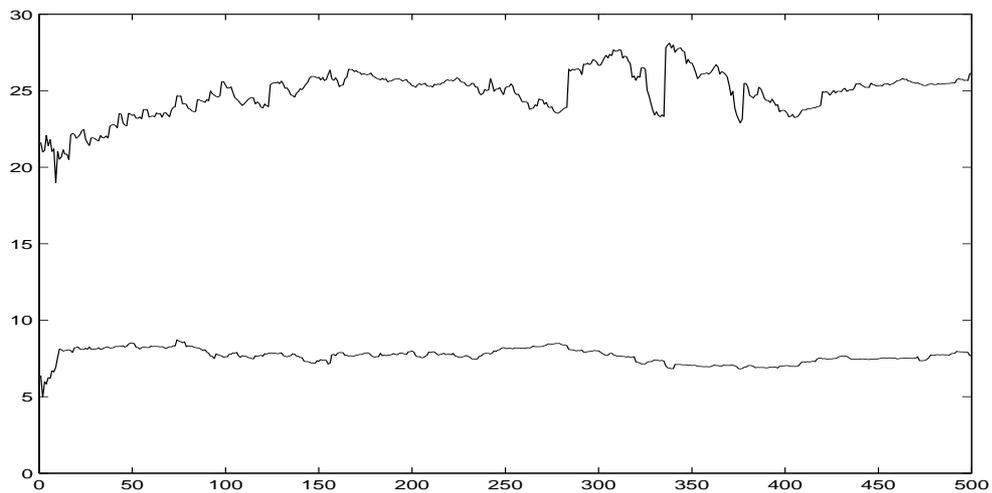


FIG. 8.18 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$  et  $\theta_0^2 = 8$ , avec  $n = 1000$  particules

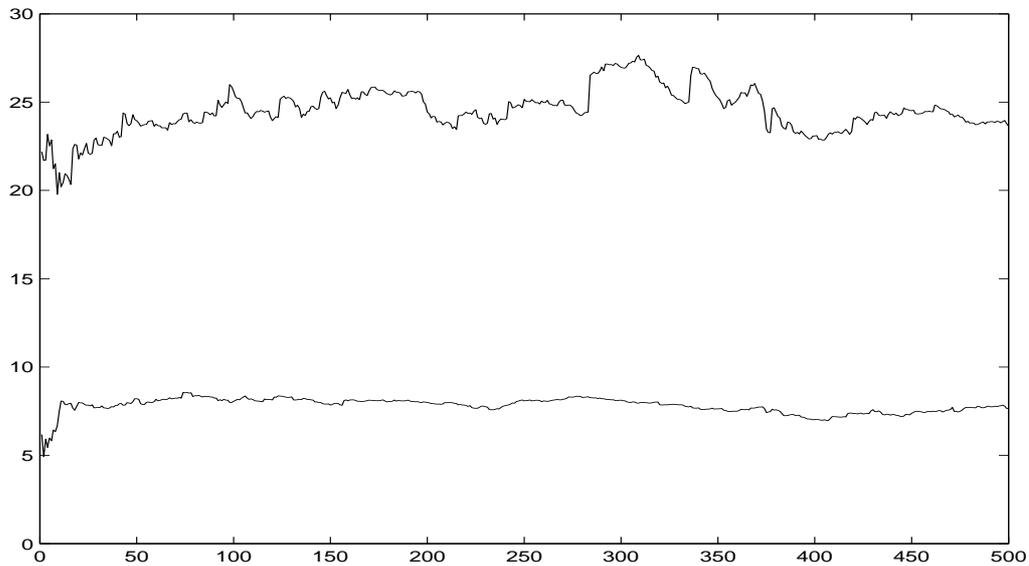


FIG. 8.19 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$  et  $\theta_0^2 = 8$ , avec  $n = 2000$  particules

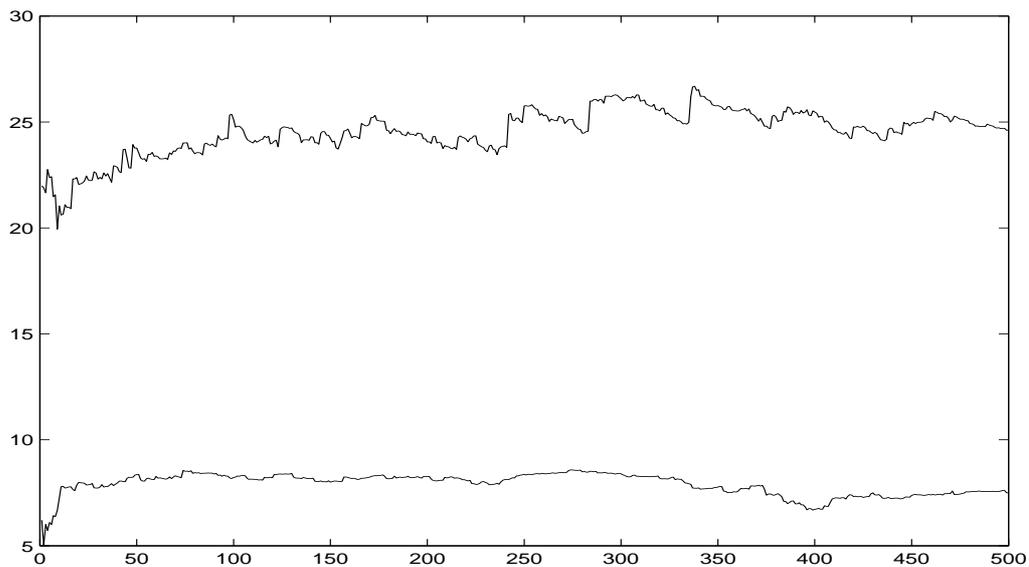


FIG. 8.20 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$  et  $\theta_0^2 = 8$ , avec  $n = 5000$  particules

### Introduction d'un troisième paramètre inconnu

Enfin, un troisième paramètre inconnu est introduit dans le système qui devient :

$$\begin{cases} x_t = \theta^3 x_{t-1} + \frac{\theta^1 x_{t-1}}{1+x_{t-1}^2} + \theta^2 \cos(1.2t) + v_t \\ y_t = \frac{x_t^2}{20} + w_t \end{cases}$$

La vraie valeur de  $\theta$  est  $\theta_0 = (\theta_0^1, \theta_0^2, \theta_0^3) = (25, 8, 0.5)$ . La loi a priori utilisée est une loi uniforme sur  $[15, 30] \times [0, 15] \times [-5, 10]$ ,  $p_0(\theta^1, \theta^2, \theta^3) = \mathcal{U}([15, 30] \times [0, 15] \times [-5, 10])$ . Les figures 8.21, 8.22, 8.23 et 8.24 représentent l'évolution, sur 500 pas de temps, des estimations de  $\theta_0^1$ ,  $\theta_0^2$  et  $\theta_0^3$  fournies par le filtre avec ré-échantillonnage, pour respectivement 500, 1000, 2000 et 5000 particules.

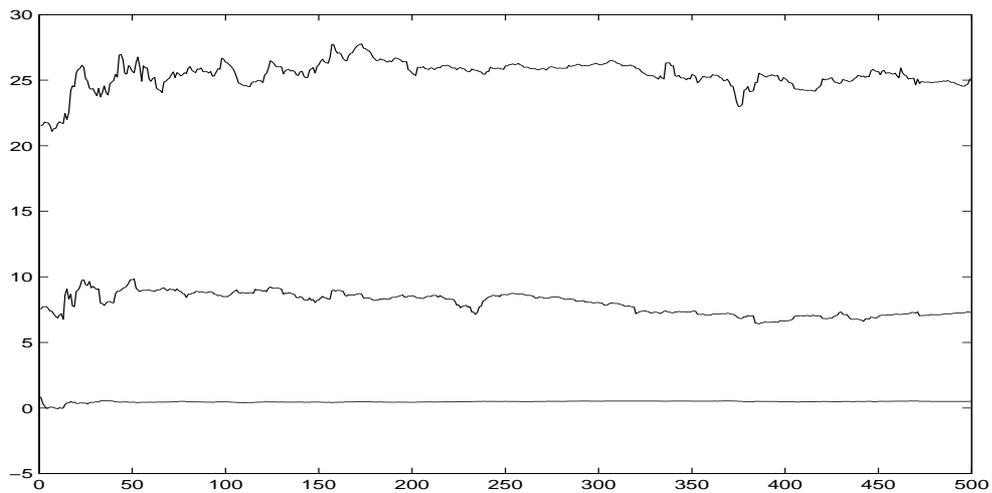


FIG. 8.21 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$ ,  $\theta_0^2 = 8$  et  $\theta_0^3 = 0.5$ , avec  $n = 500$  particules

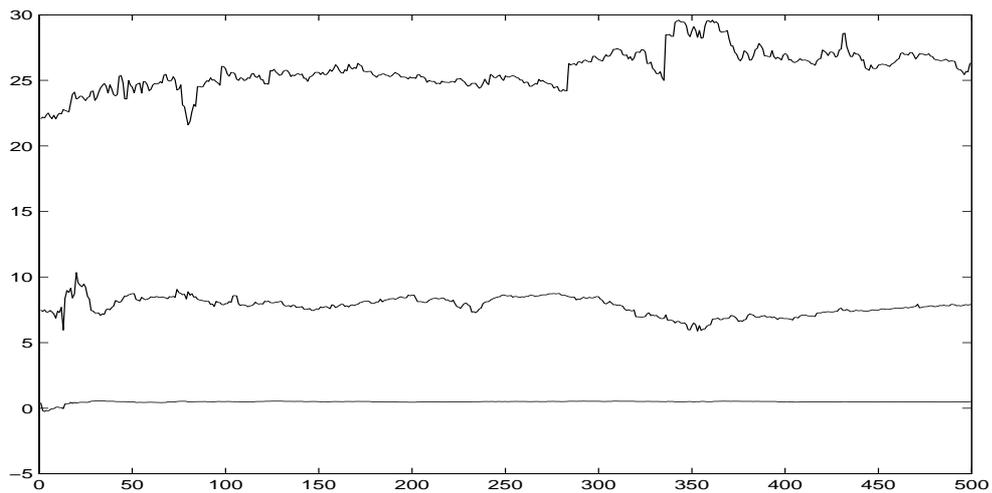
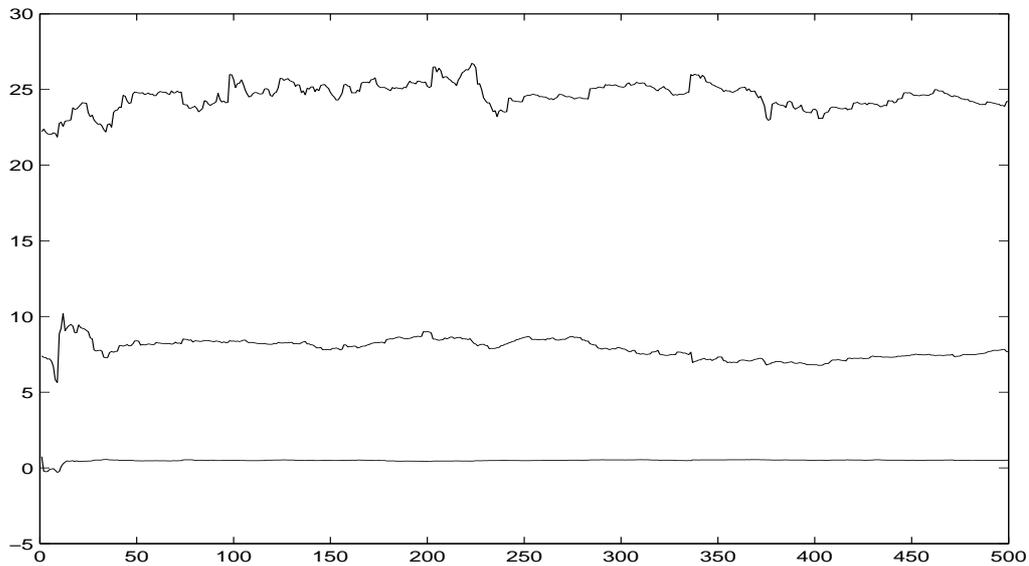
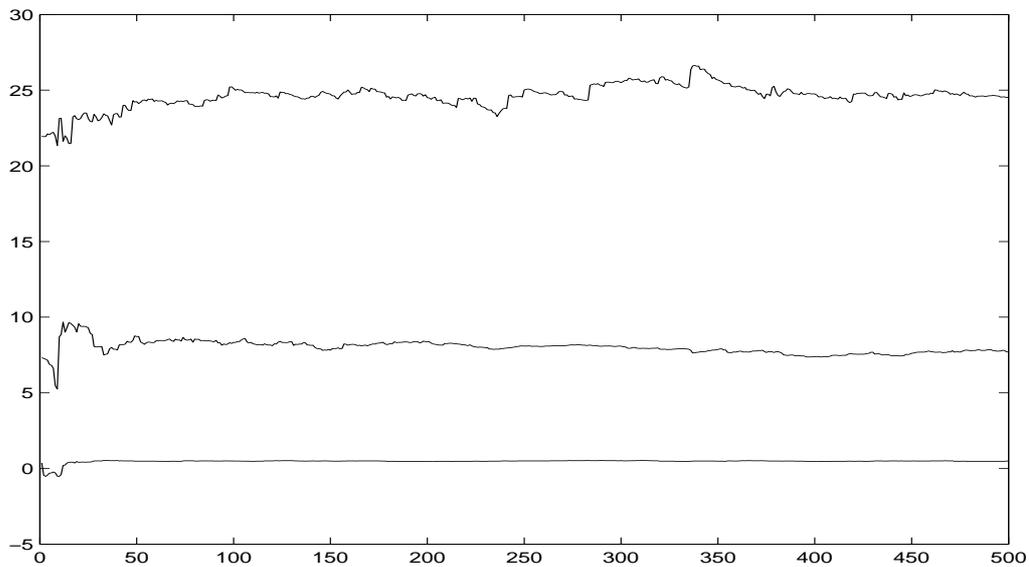


FIG. 8.22 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$ ,  $\theta_0^2 = 8$  et  $\theta_0^3 = 0.5$ , avec  $n = 1000$  particules

FIG. 8.23 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$ ,  $\theta_0^2 = 8$  et  $\theta_0^3 = 0.5$ , avec  $n = 2000$  particulesFIG. 8.24 – Estimation de  $\theta_0^1 = 25$ ,  $\theta_0^2 = 8$  et  $\theta_0^3 = 0.5$ , avec  $n = 5000$  particules

Pour les trois configurations envisagées, un, deux ou trois paramètres inconnus, il semble, d'après les figures précédentes, que les paramètres soient globalement bien estimés et ce, dès 500 particules. De plus, les estimations atteignent toujours très rapidement, après une ou deux observations, un voisinage de  $\theta_0$ .

Afin de caractériser, de manière quantitative, l'impact de l'introduction des paramètres inconnus sur la qualité du filtrage pour le filtre par convolution avec ré-échantillonnage, nous avons réalisé une série de simulations. Pour les trois cas, nous avons évalué l'erreur commise par le filtre avec ré-échantillonnage, avec et sans paramètres inconnus, pour différents nombres de particules. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux (8.17), (8.18) et (8.19).

Ces tableaux s'interprètent de la façon suivante :

- La première colonne désigne le nombre  $n$  de particules utilisées.
- La seconde colonne donne la moyenne des erreurs quadratiques de l'état, calculées sur 100 trajectoires de 100 pas de temps, sans paramètre inconnu.
- La troisième colonne donne la moyenne des erreurs quadratiques de l'état calculées sur 100 trajectoires de 100 pas de temps avec 1,2 ou 3 paramètres inconnus, selon le cas considéré.
- Les colonnes suivantes donnent la moyenne des erreurs absolues au dernier instant ( $t=100$ ) pour chacun des paramètres inconnus.

Nb particules	CFR	CFR-1param	Param
$n = 20$	24.35	32.10	3.63
$n = 50$	13.49	19.04	3.11
$n = 100$	12.61	16.82	2.69
$n = 200$	11.05	14.10	2.08
$n = 500$	10.51	12.72	1.71
$n = 1000$	10.57	11.90	1.28
$n = 5000$	11.05	12.27	0.87

TAB. 8.17 – Filtre avec ré-échantillonnage pour 1 paramètre inconnu

Nb particules	CFR	CFR-2param	Param1	Param2
$n = 20$	23.81	73.94	4.80	2.45
$n = 50$	15.31	46.03	3.64	1.69
$n = 100$	13.28	25.86	3.15	0.80
$n = 200$	11.99	19.90	2.73	0.61
$n = 500$	10.42	17.31	1.89	0.51
$n = 1000$	11.25	15.54	2.00	0.46
$n = 5000$	10.09	13.24	1.19	0.31

TAB. 8.18 – Filtre avec ré-échantillonnage pour 2 paramètres inconnus

Nb particules	CFR	CFR-3param	Param1	Param2	Param3
$n = 100$	13.14	95.45	5.02	3.43	0.17
$n = 200$	11.92	46.65	2.44	1.63	0.10
$n = 500$	10.72	29.37	2.12	0.86	0.04
$n = 1000$	12.00	24.70	1.67	0.55	0.03
$n = 5000$	10.30	18.79	1.28	0.48	0.02
$n = 10000$	9.79	16.59	0.96	0.45	0.02

TAB. 8.19 – Filtre avec ré-échantillonnage pour 3 paramètres inconnus

Naturellement, plus il y a de paramètres inconnus, plus l'erreur commise est grande. Mais dans tous les cas, la perte de qualité induite par les paramètres inconnus s'atténue lorsque le nombre de particules augmente. De plus, les estimations des paramètres, réalisées simultanément, sont aussi de bonne qualité, et ce, même avec un nombre de particules raisonnable. Ces résultats sont donc conformes aux propriétés théoriques obtenues dans les chapitres précédents.

### 8.3 Conclusion du huitième chapitre

Les filtres développés à partir des noyaux de convolution se comportent plus qu'honorablement sur les exemples considérés, puisque leurs résultats surpassent largement ceux du filtre de Kalman étendu et égalent ceux de Lo([99]) et des filtres particuliers.

Les hypothèses nécessaires à leur convergence sont plus faibles que celles de Kalman puisqu'on n'exige pas que les bruits soient gaussiens. Elles sont aussi plus souples que celles des filtres particuliers :

- Il n'est pas nécessaire de connaître la forme analytique de la vraisemblance du bruit d'observation. Il suffit d'être en mesure de générer des variables suivant cette loi.

- Il est possible de filtrer des systèmes dynamiques dont le bruit sur les observations est très faible, situation dans laquelle les filtres particuliers sont en difficulté. Il est même possible de filtrer des systèmes dynamiques dont les observations ne sont pas bruitées et pour lesquels les filtres particuliers ne sont pas

rigoureusement calculables.

Les exemples de problèmes d'estimation de paramètres inconnus en cours de filtrage ont mis en avant la supériorité de la technique bayésienne. En effet, les minimisations stochastiques sont trop coûteuses en terme de temps de calcul et les estimations de qualité médiocre. Les alternatives avec "aléas figés" offrent des temps de calcul acceptables, mais sont de qualités inégales. Par conséquent, elles conservent un intérêt. Toutefois une étude plus approfondie, afin d'améliorer leur comportement et de définir une stratégie pour le choix des paramètres  $T$  et  $n$ , est nécessaire avant d'envisager une utilisation pratique.

L'approche bayésienne demeure donc la plus attrayante. En effet, elle s'intègre facilement dans la procédure de filtrage et ne provoque seulement qu'une légère augmentation du temps de calcul car il faut prendre plus de particules. Cette procédure reste suffisamment rapide pour être utilisable en ligne et, comme on l'a vu sur les exemples, elle fournit des estimations de bonne qualité tant pour l'état que pour les paramètres.

De plus, elle semble très bien supporter des systèmes dynamiques contenant plusieurs paramètres inconnus. Cette qualité est d'autant plus importante que les estimateurs à base d'optimisation sont en difficulté dans ce contexte.

# Chapitre 9

## Application à un bio-procédé de dépollution

Ce dernier chapitre est l'occasion d'analyser le comportement de nos filtres sur un problème réel à l'origine de ce travail méthodologique. En l'occurrence, le système dynamique considéré, tout au long de ce chapitre, modélise le fonctionnement d'un bioréacteur de traitement d'eaux usées, par un procédé de type digestion anaérobie. Il est important de préciser que ce modèle est le fruit de plusieurs années de recherche du Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement (LBE) de l'INRA à Narbonne.

D'autre part, cette thèse se situe dans la continuité de l'étude, par des approches de statistique non paramétrique, de problématiques liées aux bioprocédés, du Laboratoire d'Analyse des Systèmes et Biométrie de l'INRA à Montpellier. Les travaux précédents de Hilgert ([75]) et Wagner ([127]) notamment, s'inscrivent dans cet axe de recherche du laboratoire.

Les bioprocédés de dépollution consistent en la transformation, au sein d'un réacteur, de matières organiques (substrats), par des micro organismes (biomasses). Il est fréquent que les capteurs à disposition, souvent d'un coût prohibitif, ne mesurent que certaines des variables (concentrations) nécessaires au contrôle. Il est alors indispensable d'estimer les autres variables, compte tenu du modèle du procédé, c'est-à-dire de réaliser une opération de filtrage sur les variables de sortie mesurables. Cette opération est aussi souvent appelée reconstruction d'état du système dynamique considéré par les automaticiens.

Dans un premier temps, nous présentons le système dynamique modélisant le

bioprocédé de digestion anaérobie au centre de l'étude.

Puis nous présentons la partie des résultats de comportement de nos filtres par convolution sur des simulations réalisées à partir de ce modèle. Cette seconde partie permettra aussi d'évaluer le potentiel des filtres ainsi que leur robustesse par rapport aux paramètres incertains du modèle.

Finalement, la dernière partie du chapitre est consacrée au filtrage sur des données recueillies par le LBE. La difficulté principale, par rapport aux simulations, réside dans l'instabilité de certains capteurs qui génèrent parfois des observations aberrantes.

## 9.1 Présentation du problème

Dans ce chapitre, nous donnons seulement les informations relatives au bio-procédé permettant de comprendre le système dynamique. Une présentation plus générale des bioprocédés technologiques et de leurs modélisations est proposée en annexe.

### Modélisation de la bioréaction considérée

Ce modèle est de conception récente (Bernard & al. [9]). Il est utilisé au Laboratoire de Biotechnologie de l'Environnement (LBE) de l'INRA à Narbonne. Il porte sur un procédé de type digestion anaérobie modélisé par une approche bilan-matière. Une description détaillée du réacteur et des capteurs est réalisée par Steyer & al.([122]).

Ce type de réacteur ne peut être utilisé directement en station d'épuration car son temps de réaction aux variations de concentrations des polluants est trop lent. Cependant, il est bien adapté à des tâches spécifiques ponctuelles, comme, le traitement des boues de vinification après vendanges car, dans un tel contexte, la concentration en polluant est totalement sous contrôle.

Le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{B}_1 = (\mu_1 - \alpha D)B_1 \\ \dot{B}_2 = (\mu_2 - \alpha D)B_2 \\ \dot{Z} = D(Z^{in} - Z) \\ \dot{S}_1 = D(S_1^{in} - S_1) - k_1\mu_1 B_1 \\ \dot{S}_2 = D(S_2^{in} - S_2) + k_2\mu_1 B_1 - k_3\mu_2 B_2 \\ \dot{C}_{TI} = D(C_{TI}^{in} - C_{TI}) + k_4\mu_1 B_1 + k_5\mu_2 B_2 \\ \quad - Q_{CO_2} \end{array} \right. \quad (9.1)$$

C'est un système dynamique continu, défini par des équations différentielles. Or, tous les systèmes considérés jusqu'à présent étaient discrets. Cela ne pose aucun problème sur le plan théorique, pour nos filtres par convolution. En effet, il suffit d'être en mesure de générer des états et des observations suivant le modèle. Donc, rien n'empêche que cela soit fait en calculant des intégrales. La seule difficulté est alors pratique : le temps de calcul risque d'augmenter. Pour simplifier le problème, dans la suite, tous les traitements numériques sont réalisés avec une version discrétisée, selon le schéma d'Euler, de ce modèle d'EDO.

Il y a une autre différence fondamentale avec les systèmes habituellement considérés. Le modèle est ici supposé refléter parfaitement la réalité, car il est le fruit d'une approche déterministe. Il faut donc ajouter quelques perturbations à ce système pour être dans le contexte d'application des filtres particulières, justifiées de plus par la discrétisation opérée.

Ce travail de discrétisation et de perturbation du système 9.1 sera réalisé par la suite. Nous continuons la présentation du système, dans les sections suivantes, par la description de ces éléments.

## Description des variables

Toutes les variables d'état sont des variables de concentrations :

$B_1$	Concentration en bactéries acidogènes.
$B_2$	Concentration en bactéries méthanogènes.
$Z$	Concentration dans le milieu en ions forts.
$S_1$	Concentration en polluants quantifiée par leur demande chimique en oxygène.
$S_2$	Concentration en acides gras volatils.
$C_{TI}$	Concentration totale de carbone inorganique.
$D$	Taux de dilution.
$Q_{CO_2}$	Débit de $CO_2$ .

Les variables  $B_1$ ,  $B_2$  sont relatives aux biomasses.  $S_1$  et  $S_2$ , sont relatives aux substrats.

Les deux variables restantes  $Z$  et  $C_{TI}$  servent d'indicateurs de l'état du bioréacteur. Comme elles sont mesurables, elles peuvent être utiles en filtrage.

$D$  est la variable de contrôle.  $Q_{CO_2}$  est une variable de sortie.

## Les lois de croissance des bactéries

Les taux de croissance  $\mu_1$  et  $\mu_2$  des biomasses sont modélisés respectivement par des lois de Monod et d'Haldane ([121]) :

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1}$$

et

$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_2 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2}$$

avec

$\mu_{max1} = 1.2$	Tx de croissance max des biomasses $B_1$ .
$\mu_{max2} = 0.74$	Tx de croissance max des biomasses $B_2$ .
$K_{S_1} = 8.875$	Paramètre de saturation du substrat $S_1$ .
$K_{S_2} = 25$	Paramètre de saturation du substrat $S_2$ .
$K_I = 16$	Constante d'inhibition associé à $S_2$ .

## Description des paramètres

Comme pour le modèle, les valeurs des paramètres intervenant dans le système sont justifiées par Bernard & al.([9]) :

$\alpha = 0.5$	proportion du taux de dilution relatif à l'hétérogénéité du procédé.
$k_1 = 42.14$	rendement de conversion $S_1 \rightarrow B_1$ .
$k_2 = 116.5$	rendement de conversion $S_1 \rightarrow B_2$ .
$k_3 = 268$	rendement de conversion $S_2 \rightarrow B_2$ .
$k_4 = 50.6$	rendement de conversion $S_1 \rightarrow CO_2$ .
$k_5 = 343.6$	rendement de conversion $S_2 \rightarrow CO_2$ .
$k_6 = 453$	rendement de conversion $S_2 \rightarrow CH_4$ .

Les variables d'état d'intérêt sont les substrats  $S_1$ ,  $S_2$  et, à un degré moindre, les biomasses  $B_1$ ,  $B_2$ . Leurs mesures en ligne sont délicates. Des capteurs permettent de mesurer les variables  $Z$  et  $C_{TI}$  et, avec encore plus de fiabilité le débit de gaz du bioréacteur  $Q_{gaz}$  et le pH du milieu. Il s'agit donc d'estimer  $S_1$ ,  $S_2$ ,  $B_1$  et  $B_2$ , connaissant au moins certaines des quatre variables précédentes.

Dans l'opération de filtrage, nous comparons les valeurs  $Z$ ,  $C_{TI}$ ,  $pH$  et  $Q_{gaz}$  mesurées, à celles calculées à partir du modèle. Les valeurs calculées de  $Z$  et  $C_{TI}$  sont directement données par le modèle. Pour le  $pH$ , on peut utiliser une équation relative à l'équilibre sur le carbone. Ainsi, à chaque instant  $t$ , le pH du réacteur est donné par

$$pH(t) = -\log \left( \frac{K_{co2}(C_{TI}(t) - Z(t) + S_2(t))}{Z(t) - S_2(t)} \right) / \log 10$$

Où  $K_{co2} = 4,9 \cdot 10^{-7}$  est la constante de dissociation.

La calcul du débit de gaz  $Q_{gaz}$  est plus compliqué. Ce débit est la somme des débits de gaz carbonique ( $CO_2$ ) et de méthane ( $CH_4$ ) dégagés :  $Q_{gaz}(t) = Q_{CO_2}(t) + Q_{CH_4}(t)$ .

Le débit de méthane dégagé peut se calculer par :

$$Q_{CH_4}(t) = k_6 q_{CH_4}(t) / 1000 / 24$$

Où  $q_{CH_4}(t) = V \times k_6 \times \mu_2(t) \times B_2(t)$  et  $k_6 = RT/P_t(t)$  (RT constante des gaz parfaits).  $V$  désigne le volume du réacteur et  $P_t$  désigne la pression mesurée

en ligne.

Pour le débit de  $CO_2$  dégagé :

$$Q_{CO_2}(t) = kla(C_{TI}(t) + S_2(t) - Z(t) - Kh \times P_c(t))$$

Où  $Kh = 16$ , constante de Henry,  $kla = 19.8$ , échange  $CO_2$  dissous-gazeux par jour spécifique à ce réacteur.  $P_c$  s'obtient à l'aide des deux équations suivantes :

$$P_c(t) = \frac{\phi(t) - \sqrt{\phi(t)^2 - 4Kh \times P_t(t)(C_{TI}(t) + S_2(t) - Z(t))}}{2Kh}$$

et

$$\phi(t) = C(t) + S_2(t) - Z(t) + Kh \times P_t(t) + \frac{k_6 \mu_2(t) B_2(t)}{kla}$$

A présent que le système modélisant le bioréacteur est détaillé, nous consacrons la section suivante aux problèmes de filtrage y afférant.

## 9.2 Filtrage du bioprocédé

Dans la première phase, nous évaluons le potentiel du filtre par convolution avec ré-échantillonnage sur ce modèle. Ainsi, nous l'utilisons sur différentes configurations de variables observées sur des données simulées à partir du bio-procédé. Puis dans la deuxième phase, nous travaillons sur des données réelles mesurées sur un bio-réacteur de l'unité LBE de l'INRA Narbonne. Le passage sur données réelles nécessite de faire face à deux grosses difficultés : l'inexactitude du modèle et l'imprécision temporaire de certaines mesures.

### 9.2.1 Phase de simulations du bioprocédé

Le modèle de ce procédé peut bien sûr s'écrire sous la forme générale (1.1). Soit  $X_t = (B_1, B_2, Z, S_1, S_2, C_{TI})$  et  $f_t$  le système dynamique discrétisé modélisant le bioréacteur. On a  $X_{t+1} = f_t(X_t)$ .

Les filtres stochastiques, et donc par convolution, supposent que le système dynamique est bruité. Or, comme le modèle considéré n'est pas exact, il est raisonnable de le bruite artificiellement pour se rapprocher de la situation réelle. Le modèle que l'on considère dans la suite est alors de la forme  $X_{t+1} = f_t(X_t) + \varepsilon_{t+1}$ .

Comme le modèle, bien que non exact, est supposé de "bonne qualité" nous avons choisi, arbitrairement, pour les simulations, des petits bruits gaussiens :  $\varepsilon_t^1, \varepsilon_t^2 \sim$

$\mathcal{N}(0, 0.01)$ ,  $\varepsilon_t^3 \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ ,  $\varepsilon_t^4 \sim \mathcal{N}(0, 0.1)$ ,  $\varepsilon_t^5 \sim \mathcal{N}(0, 0.3)$  et  $\varepsilon_t^6 \sim \mathcal{N}(0, 0.5)$ .

Comme nous l'avons expliqué précédemment, pour évaluer le comportement du filtre avec ré-échantillonnage, nous avons considéré différents cas de figures : nous avons fait varier pour chaque cas, l'ensemble des variables d'états observées et celui des variables à estimer. Cependant, comme les concentrations en substrats  $S_1$  et  $S_2$  sont toujours à estimer en pratique, nous les avons toujours supposées non observées. De plus, le  $pH$  et le débit de gaz du bioréacteur  $Q_{gaz}$  étant mesurés avec une assez grande fiabilité, nous les maintenons toujours dans l'ensemble des variables observées.

Pour évaluer les performances de filtrage, nous présentons le tableau des moyennes des erreurs quadratiques (MSE), entre les valeurs vraies et filtrées, des variables à estimer, sur  $N = 50$  simulations d'une journée, avec des mesures toutes les deux minutes ( $t = 1, \dots, 720$ ). Afin de donner une idée plus intuitive des performances, nous représentons graphiquement une des 50 simulations, à savoir : les courbes de vraies valeurs de chacune des variables, en lignes continues (—), juxtaposées aux courbes des valeurs estimées par le filtre, en lignes brisées (- -).

**Cas 1**

Variables observées :  $Y = [pH, Q_{gaz}] + \eta$  où  $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$ .

Variables estimées :  $B_1, B_2, S_1, S_2, Z$  et  $C_{TI}$ .

Variable	MSE
$B_1$	0.0495
$B_2$	0.0369
$Z$	0.6936
$S_1$	1.7188
$S_2$	5.9692
$C_{TI}$	0.7656

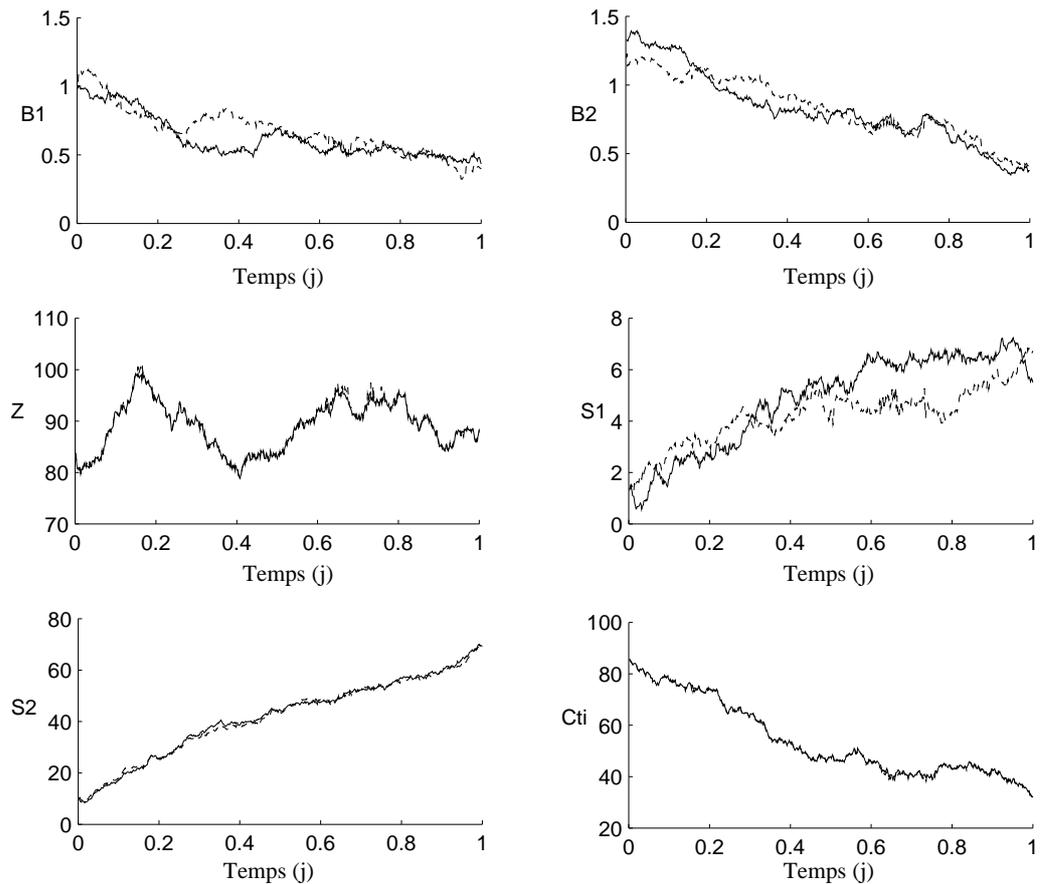


FIG. 9.1 – Illustration du Cas 1,  $n = 500$  particules

**Cas 2**

Variables observées :  $Y = [pH, Q_{gaz}, Z, C_{TI}] + \eta$

où  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  et  $\eta_4 \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$ .

Variables estimées :  $B_1, B_2, S_1$  et  $S_2$ .

Variable	MSE
$B_1$	0.0493
$B_2$	0.0361
$S_1$	1.7091
$S_2$	5.9420

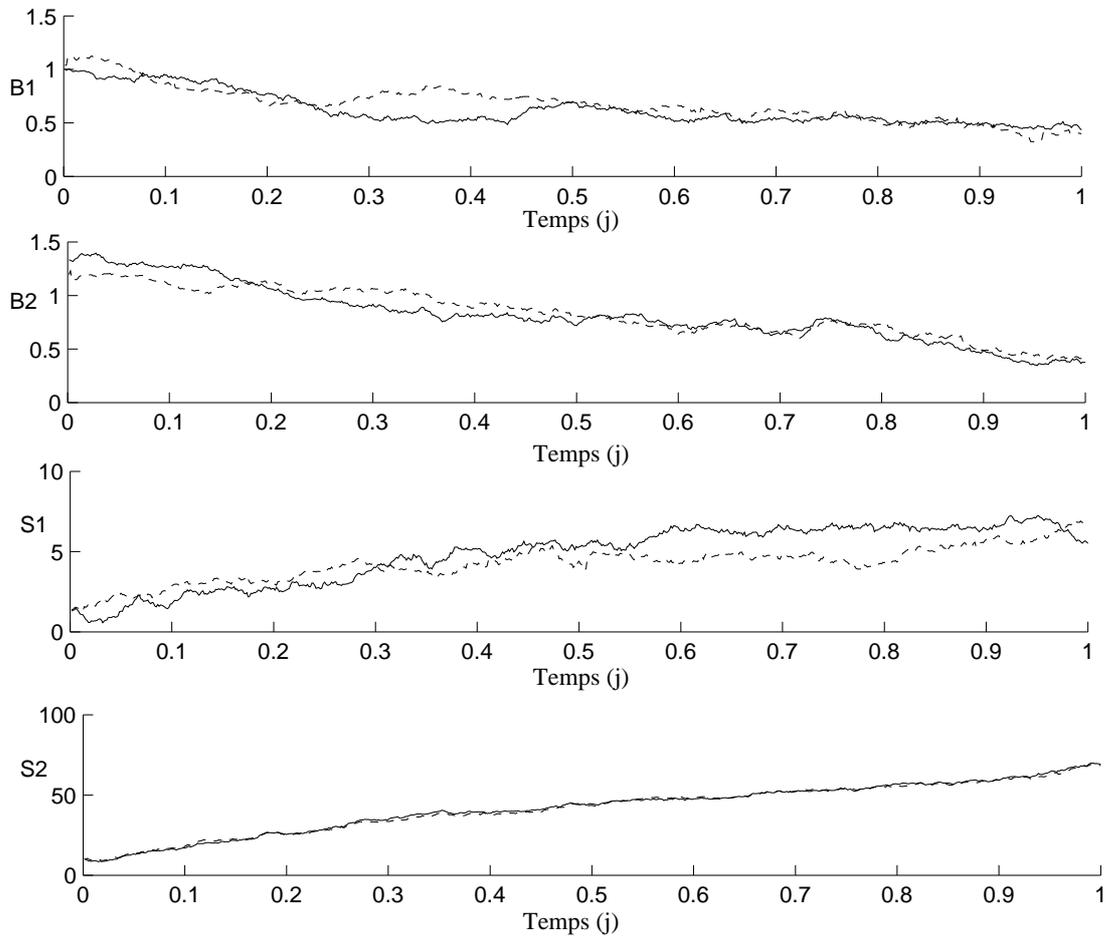


FIG. 9.2 – Illustration du Cas 2,  $n = 500$  particules

Il ressort des deux premiers cas, que la qualité du filtrage est très peu affectée par la suppression des observations  $Z$  et  $C_{TI}$ . De plus, le fait d'estimer un état à six dimensions pour le cas 1 ou un état à quatre dimensions pour le cas 2, n'affecte pas le filtre. On retrouve ainsi la robustesse, par rapport aux dimensions, caractéristique des méthodes de Monte Carlo.

Afin de tester notre filtre en situation de forte erreur de modèle, dans les deux cas suivants, nous simplifions le modèle postulé pour le procédé, en supposant que les biomasses restent constantes (approximations fréquentes en pratique).

$$\begin{cases} B_1 = 1 \\ B_2 = 1.25 \end{cases}$$

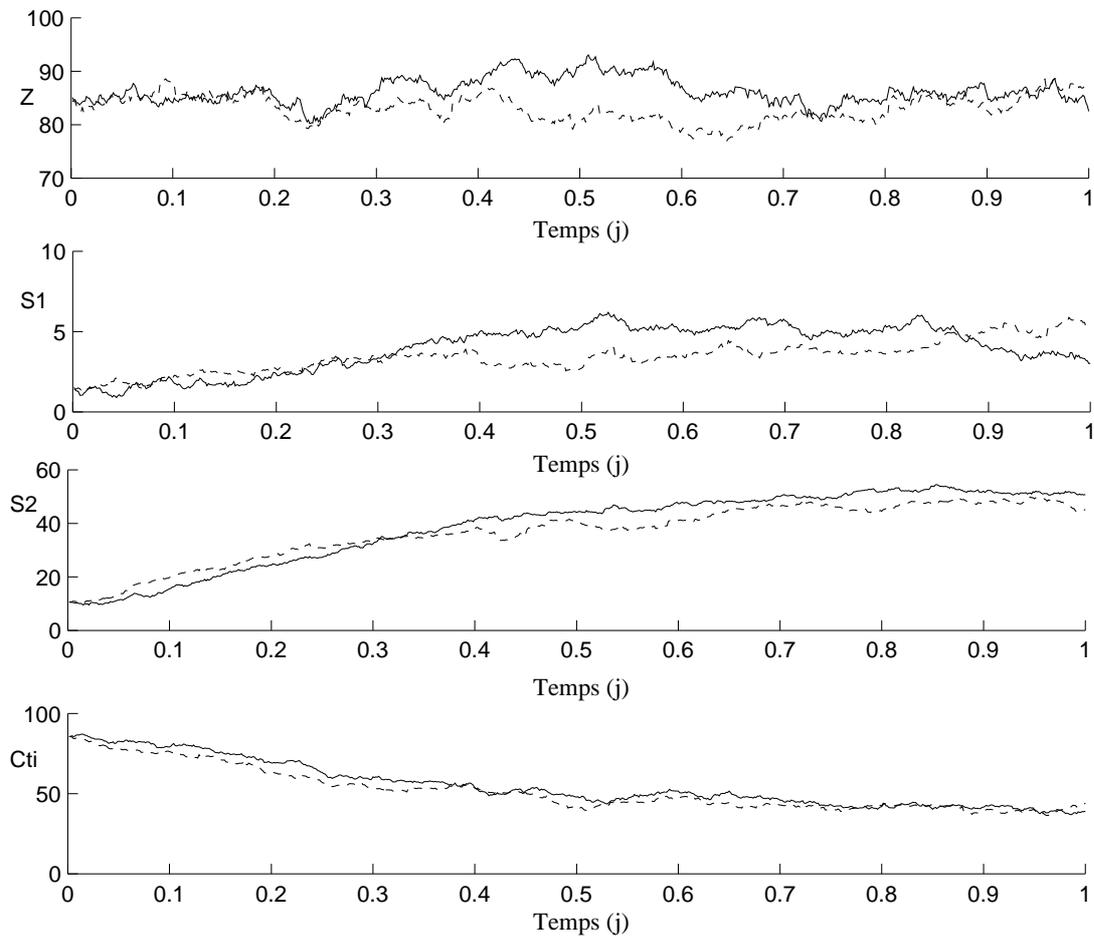
Cependant, les évolutions vraies (simulées) de  $B_1$  et  $B_2$  restent comme dans le modèle (9.1). C'est-à-dire, la trajectoire à estimer est générée avec un système dynamique dont les biomasses sont dynamiques, alors que les trajectoires du filtre sont générées avec des biomasses constantes.

### Cas 3

Variables observées :  $Y = [pH, Q_{gaz}] + \eta$  où  $\eta_1, \eta_2 \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$ .

Variables estimées :  $S_1, S_2, Z$  et  $C_{TI}$ .

Variable	MSE
$Z$	49.5482
$S_1$	2.9866
$S_2$	142.5208
$C_{TI}$	117.1285

FIG. 9.3 – Illustration du Cas 3,  $n = 500$  particules**Cas 4**

Variables observées :  $Y = [pH, Q_{gaz}, Z, C_{TI}] + \eta$

où  $\eta_1, \eta_2, \eta_3$  et  $\eta_4 \sim \mathcal{N}(0, 0.25)$ .

Variables estimées :  $S_1$  et  $S_2$ .

Variable	MSE
$S_1$	2.2941
$S_2$	25.7809

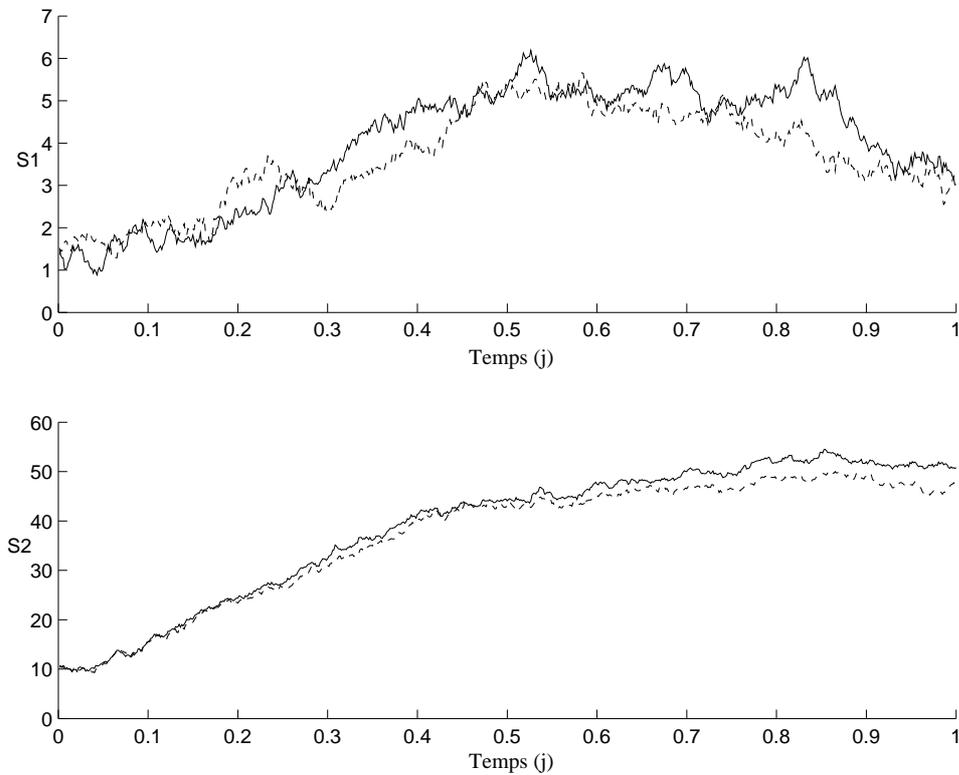


FIG. 9.4 – Illustration du Cas 4,  $n = 500$  particules

Cette fois, l'apport de  $Z$  et  $C_{TI}$  est plus significatif, puisque les résultats sont nettement meilleurs dans le cas 4 que dans le cas 3.

On remarque aussi que les MSE de  $Z$  et de  $C_{TI}$  sont beaucoup plus élevées que pour les cas 1 et 2. La raison principale est, bien sûr, que les biomasses sont, à tort, supposées constantes pour les cas 3 et 4.

Les performances obtenues dans les quatre cas précédents, nous assurent que le filtre à convolution avec ré-échantillonnage fonctionne correctement avec ce système dynamique. Comme le montrent les cas 3 et 4, il est même robuste aux erreurs de modèles. Cette qualité est nécessaire pour passer aux traitements des vraies données, puisque le modèle est nécessairement faux.

### 9.2.2 Traitement des données réelles

Le modèle du bioprocédé, présenté au début du chapitre, contient de nombreux paramètres inconnus. L'ajustement de ces paramètres pose beaucoup de difficultés en pratique. Les valeurs que nous utilisons sont celles obtenues dans le cas où les biomasses  $B_1$  et  $B_2$  sont supposées constantes. Cette hypothèse, bien qu'irréaliste, simplifie le problème d'estimation des paramètres.

#### Présentation des données

Les données considérées correspondent au fonctionnement d'un bioréacteur sur 30 jours, avec des mesures toutes les deux minutes. L'opération de filtrage se déroule donc sur 21600 pas de temps de 2 minutes. Les figures suivantes représentent l'évolution des différentes variables du modèles sur 30 jours. Les courbes en trait plein (-) sont obtenues à l'aide du modèle déterministe fourni par le LBE. Les courbes en pointillés (-.-) sont les valeurs mesurées par les différents capteurs (un ou plusieurs par variable).

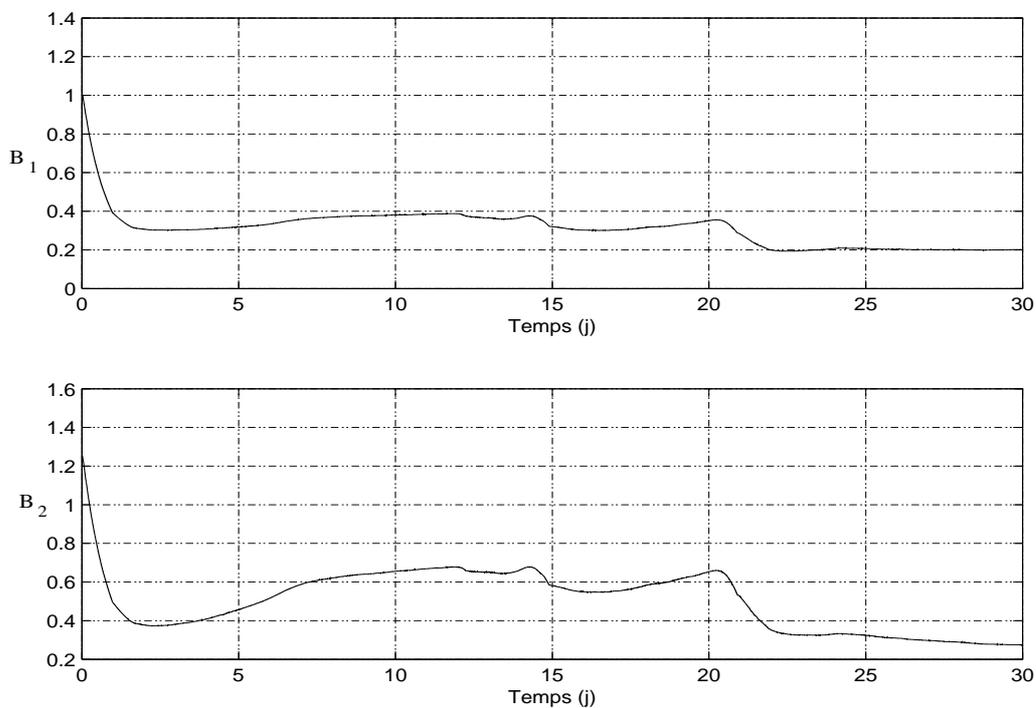
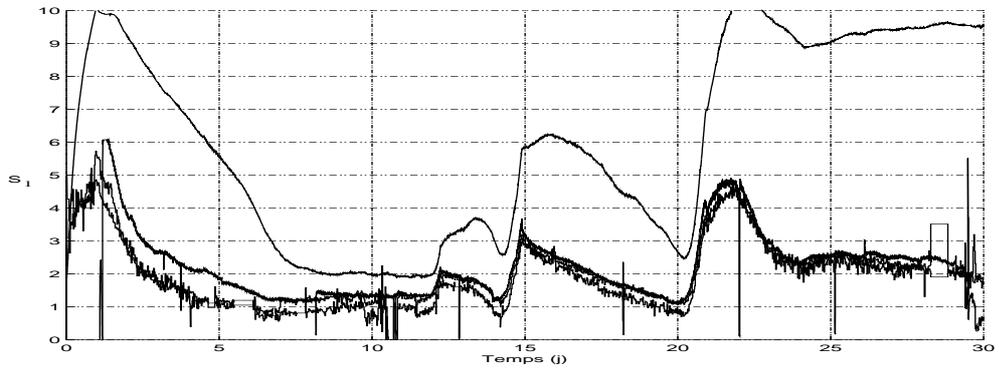
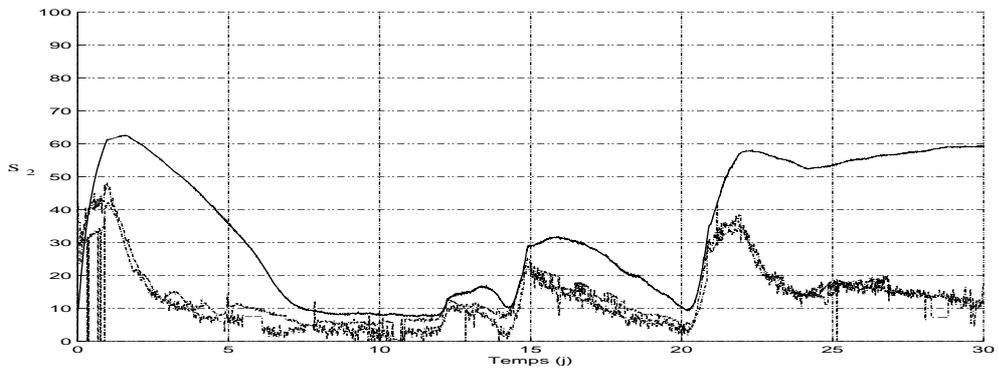
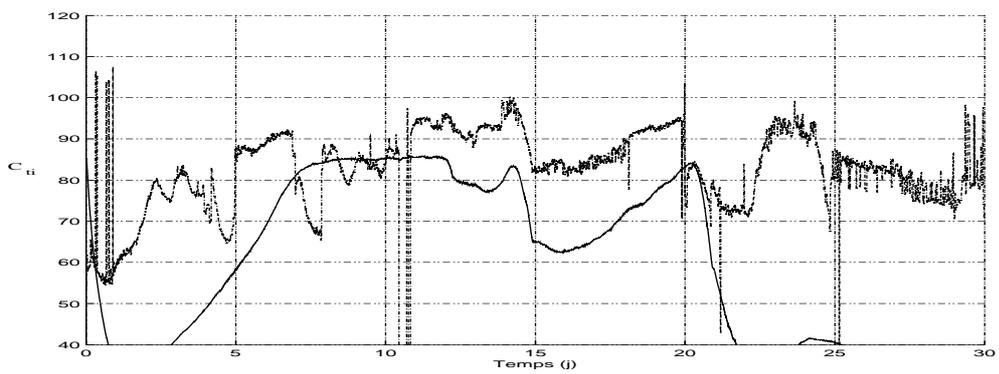


FIG. 9.5 – Evolution des biomasses

FIG. 9.6 – Evolution de  $S_1$ FIG. 9.7 – Evolution de  $S_2$ FIG. 9.8 – Evolution de  $C_{ti}$

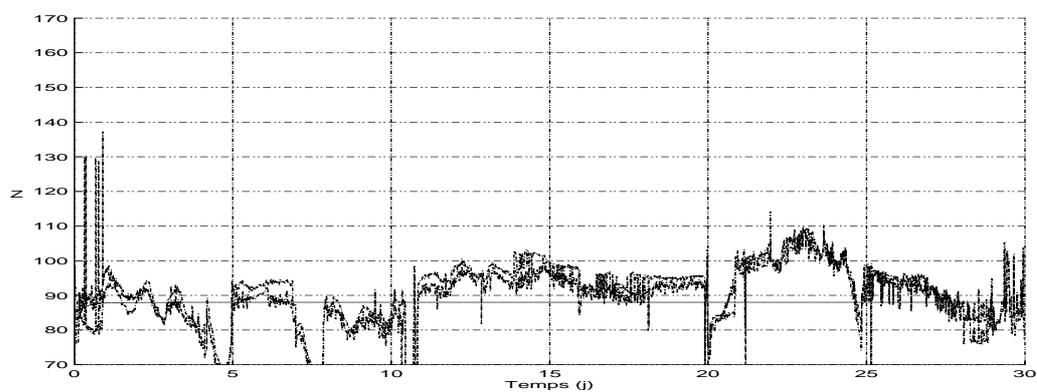
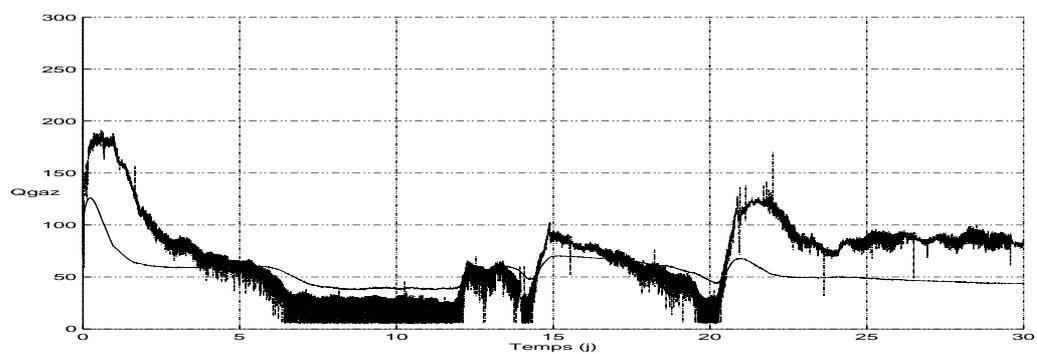
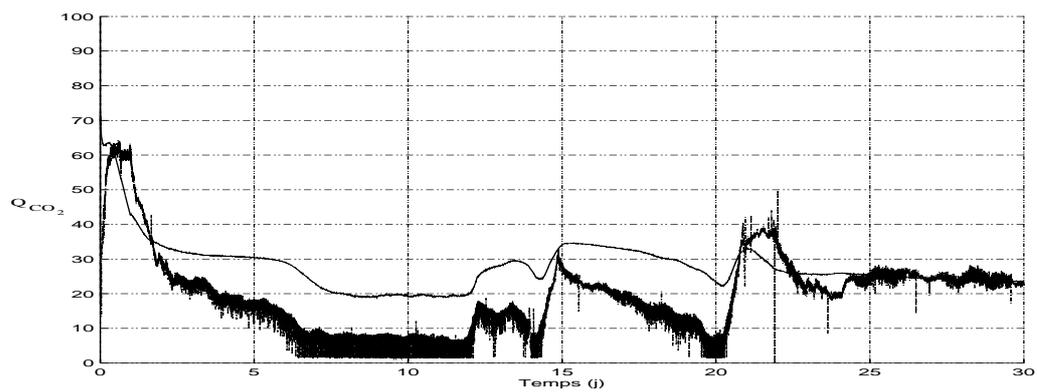
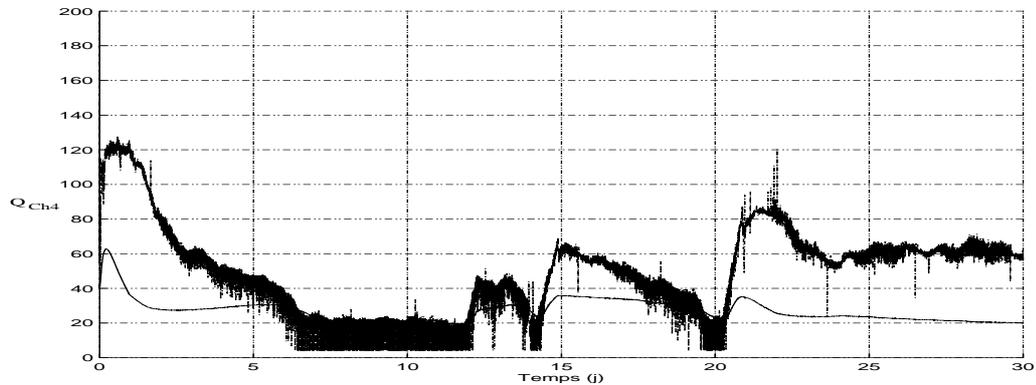
FIG. 9.9 – Evolution de  $Z$ 

FIG. 9.10 – Evolution du débit de gaz

FIG. 9.11 – Evolution du débit  $\text{CO}_2$

FIG. 9.12 – Evolution du débit de  $CH_4$ 

Comme on peut le voir sur les figures précédentes, le modèle déterministe utilisé produit des trajectoires assez éloignées des valeurs mesurées. De plus, les données mesurées ne sont pas de très bonne qualité excepté le pH (non représenté). Comme on l'a vu lors des simulations, lorsque le modèle n'est pas exact il est nécessaire de prendre un maximum de variables d'observations. Nous utilisons donc, le pH,  $Z$ ,  $C_{ti}$ , le débit de  $CO_2$  et le débit de  $CH_4$  dans un premier temps. Ensuite, nous tenterons de réduire un peu le nombre de variables observées. Toutefois, si en un instant donné, l'une d'elle prend une valeur aberrante, elle n'est pas prise en compte à cet instant-là.

### Modélisation stochastique

La prise en compte des incertitudes de modèle et des imprécisions des mesures se fait au travers de l'ajout de petits bruits sur le modèle. Tout d'abord, nous introduisons de légères perturbations sur les lois de croissance des bactéries :

$$\mu_1 = \mu_{max1} \frac{S_1}{K_{S_1} + S_1} + a_1 \times \varepsilon_1$$

et

$$\mu_2 = \mu_{max2} \frac{S_2}{K_{S_2} + S_1 + \left(\frac{S_2}{K_I}\right)^2} + a_2 \times \varepsilon_2$$

puis aussi sur le système :

$$\begin{aligned}
B_1(t+1) &= B_1(t) + T \times (\mu_1 - \alpha \times D(t)) \times B_1(t) + a_3 \times \varepsilon_3 \\
B_2(t+1) &= B_2(t) + T \times (\mu_2 - \alpha \times D(t)) \times B_2(t) + a_4 \times \varepsilon_4 \\
Z(t+1) &= Z(t) + T \times (D(t) \times (Z^{in} - Z)) + a_5 \times \varepsilon_5 \\
S_1(t+1) &= S_1(t) + T \times (D(t) \times (S_1^{in} - S_1(t)) - k1 \times \mu_1 \times B_1(t)) + a_6 \times \varepsilon_6 \\
S_2(t+1) &= S_2(t) + T \times (D(t) \times (S_2^{in} - S_2(t)) + k2 \times \mu_1 \times B_1(t) \\
&\quad - k3 \times \mu_2 \times B_2(t)) + a_7 \times \varepsilon_7 \\
C_{ti}(t+1) &= C_{ti}(t) + T \times (D(t) \times (C_{ti}^{in} - C_{ti}(t)) - Q_{CO_2}(t) \\
&\quad + k4 \times \mu_1 \times B_1(t) + k5 \times \mu_2 \times B_2(t)) + a_8 \times \varepsilon_8
\end{aligned}$$

avec  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $a_i$  l'écart type associé, pour  $i = 1, \dots, 8$ .

Comme nous ne possédons seulement qu'une vague idée sur l'ordre de grandeur des valeurs des écarts types des bruits,  $a_1, a_2, \dots, a_8$ , nous les considérons comme des paramètres inconnus à estimer en cours de filtrage. Nous avons choisis les lois a priori suivantes :

$$\begin{aligned}
a_1, a_2, a_3, a_4, a_6, a_7 &\sim \mathcal{U}[0 \ 0.3] \\
a_5, a_8 &\sim \mathcal{U}[1 \ 4]
\end{aligned}$$

### Filtrage sur données réelles

La procédure de filtrage est réalisée sur 10 jours de fonctionnement du bioréacteur. Nous utilisons le filtre par convolution avec ré-échantillonnage avec : 5000 particules, un noyau gaussien et  $h_n = std(\tilde{x}^i)n^{-0.2}$  pour chaque variable et paramètre.

Le système compte six variables d'état,  $B_1, B_2, S_1, S_2, Z, C_{ti}$  et huit paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_8$ .

Les données filtrées sont toutes les variables d'état non observées. Cependant, pour les experts du bioprocédé, les variables importantes sont les biomasses  $B_1, B_2$ , et surtout les substrats  $S_1, S_2$ . L'appréciation de la qualité du filtre se fait donc par rapport à ces variables. Toutefois, seuls les substrats sont mesurés par capteurs. Les représentations graphiques sont réalisées essentiellement pour ces derniers. Les courbes en trait plein épais (—) sont celles obtenues à l'aide du filtre. Les courbes en pointillés ( $\cdot \cdot$ ) sont, comme précédemment, les valeurs mesurées par les différents capteurs, deux ou trois selon les cas.

Comme pour les simulations, le nombre de variables observées varie : 5, 4 ou 3, pour respectivement, le premier, le deuxième et le troisième cas considérés.

Le dernier cas propose une prise en compte de l'incertitude sur les nombreux paramètres du modèle.

### Cas 1

Ce premier cas, correspond au contexte le plus favorable. Les variables observées sont : pH, Z,  $C_{ti}$ , le débit de  $CO_2$  et le débit de  $CH_4$ . Lorsque les mesures de certaines variables sont incohérentes, par rapport aux réalités biologiques ou physiques, elles sont temporairement exclues du processus de sélection. Seuls les paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_8$  du système dynamique sont ici estimés.

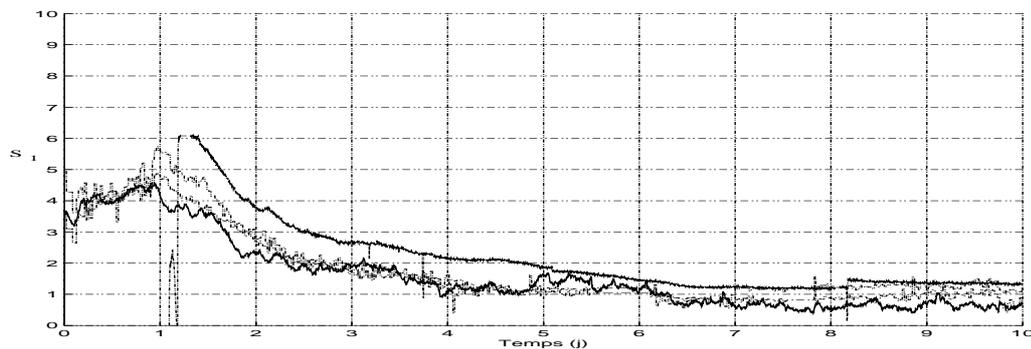


FIG. 9.13 – Evolution de  $S_1$

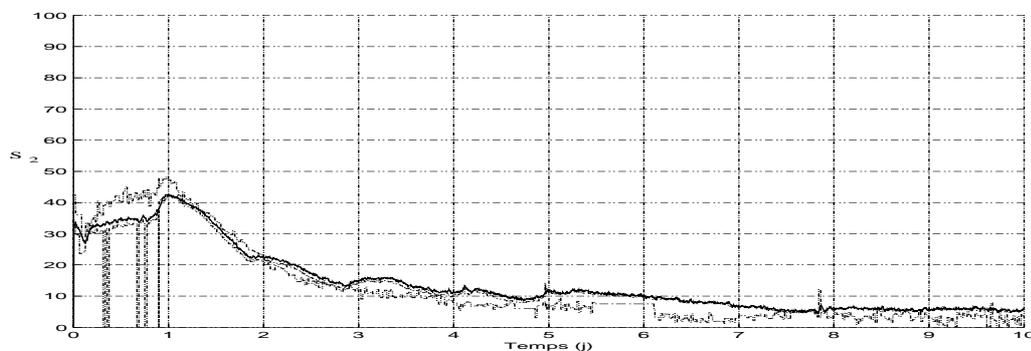


FIG. 9.14 – Evolution de  $S_2$

Le résultat obtenu par le filtre (voir figures 9.13 et 9.14) est tout à fait correct. Il reconstitue relativement bien les substrat  $S_1$  et  $S_2$ , sur toute la durée du procédé. De plus, il fournit des estimations par filtrage des biomasses non mesurées, non représentées ici car il est impossible d'apprécier leur qualité. Remarquons que les procédures déterministes sont incapables d'estimer les biomasses.

### Cas 2

Considérons à présent une situation moins favorable. Nous supposons que  $Z$  n'est plus observée. Les seules variables observées sont donc pH,  $C_{ti}$ , le débit de  $CO_2$  et le débit de  $CH_4$ . La variable  $Z$  est donc à estimer. Et comme pour le cas 1, seuls les paramètres  $a_1, a_2, \dots, a_8$  du système dynamique sont estimés.

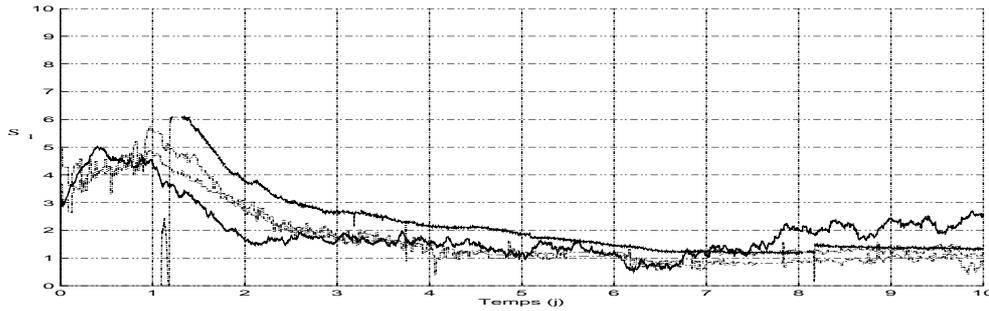


FIG. 9.15 – Evolution de  $S_1$

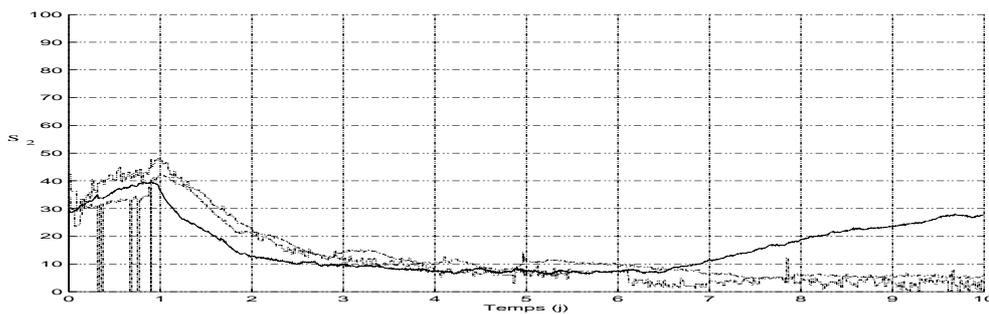


FIG. 9.16 – Evolution de  $S_2$

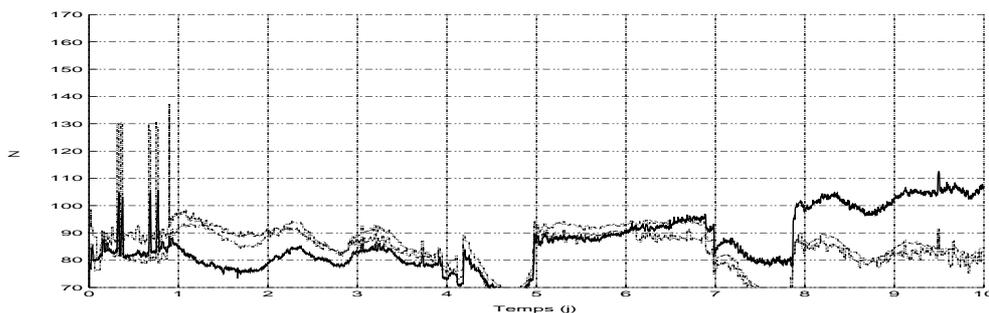


FIG. 9.17 – Evolution de  $Z$

Il ressort des figures 9.15, 9.16 et 9.17 que la qualité des estimations se dégrade dans le temps. De plus, une certaine variabilité des estimations apparaît lorsque

l'on répète l'opération. La suppression de l'observation de  $Z$  est donc préjudiciable au filtrage. Comme on l'a constaté en simulation, cela est caractéristique d'erreurs dans le modèle. Avant d'essayer d'y remédier, en estimant de nouvelles valeurs pour les paramètres, nous examinons les conséquences sur le filtrage de la suppression du  $C_{ti}$ .

### Cas 3

Nous restreignons encore le nombre de variables observées : pH, le débit de  $CO_2$  et le débit de  $CH_4$ . Le filtrage est ainsi réalisé dans une situation peu favorable.

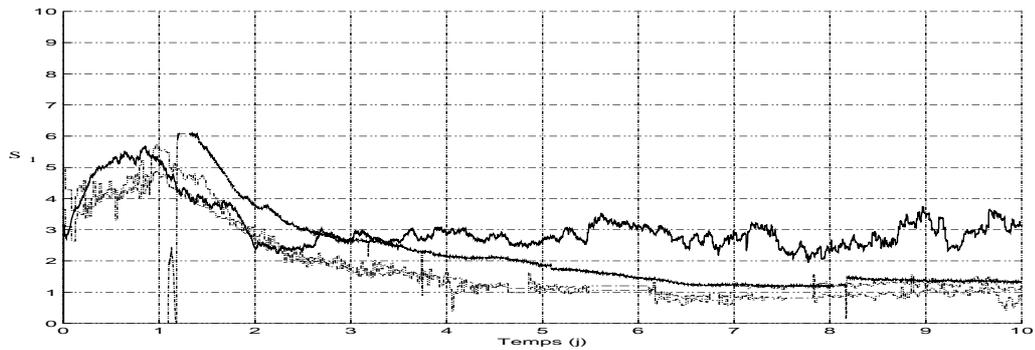


FIG. 9.18 – Evolution de  $S_1$

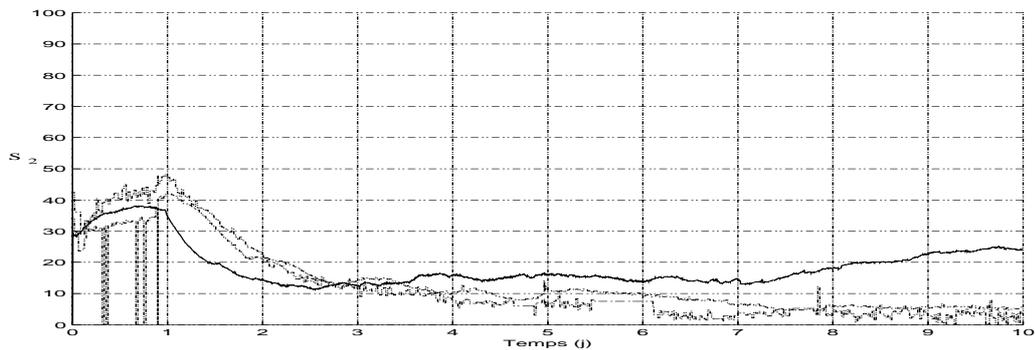
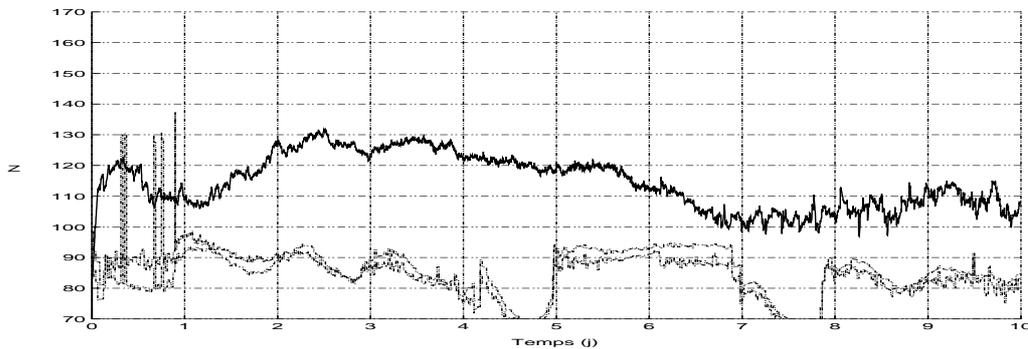
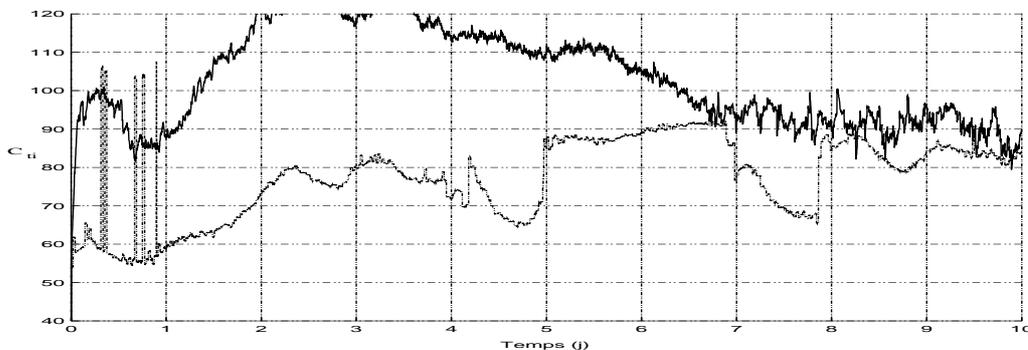


FIG. 9.19 – Evolution de  $S_2$

FIG. 9.20 – Evolution de  $Z$ FIG. 9.21 – Evolution de  $C_{ti}$ 

Les figures 9.18, 9.19, 9.20, et 9.21, illustrent la dégradation significative de la qualité du filtrage. Cependant, malgré le peu d'information utilisée, les estimations proposées par le filtre ne sont pas incohérentes, surtout pour les substrats. Comme pour le cas précédent, une assez grande variabilité des estimations est constatée lorsque l'on répète le filtrage.

#### Cas 4

Les valeurs utilisées pour les paramètres étant forcément mauvaises, puisqu'elles sont établies sous l'hypothèse que les biomasses sont constantes, nous procédons donc maintenant dans ce cas à leur estimation parallèlement au filtrage.

Pour simplifier ce travail, nous pouvons nous appuyer sur les informations suivantes établies dans la littérature (Bernard & al.[9, 10]) :

Paramètres	Valeur	Ecart-type		Ratio	Valeur	Ecart-type
$\mu_{max1}$	1.2	1				
$\mu_{max2}$	0.74	0.9				
$K_{S_1}$	7.1	5				
$K_{S_2}$	9.28	13.7				
$K_I^2$	256	320		$k_2/k_1$	2.72	2.16
$kla$	19.8	3.5		$k_6/k_3$	1.62	0.12
$\alpha$	0.5	0.4		$k_5/k_3$	1.28	0.13
$k_1$	42.14	18.94		$k_4/k_1$	1.18	3.02
$k_2$	116.5	113.5				
$k_3$	268	52.31				
$k_4$	50.6	143.6				
$k_5$	343.6	75.8				
$k_6$	453	90.9				

Toutes ces contraintes sur les paramètres s'intègrent aisément dans l'algorithme du filtre avec ré-échantillonnage avec paramètres inconnus. En effet, sur le plan théorique, cela signifie que les lois a priori des paramètres ont des supports compacts, dont les bornes sont précisées à partir des tableaux précédents : la valeur plus ou moins son écart-type associé.

Sur le plan pratique, il suffit d'attribuer un poids nul aux particules dont les paramètres ne sont pas dans leurs supports respectifs.

Cette souplesse d'intégration de contraintes n'est pas spécifique à nos filtres ; c'est, en fait, un des avantages des méthodes de Monte Carlo en général.

Le résultat du filtrage des substrats, avec l'estimation des paramètres, est présenté sur les figures 9.22, 9.23.

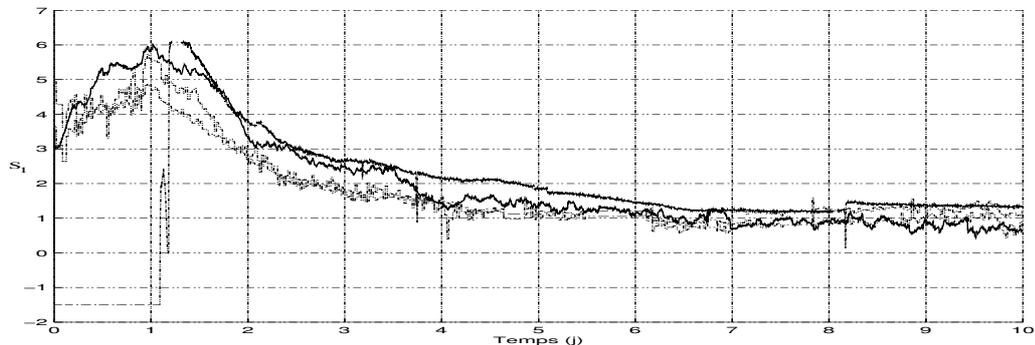
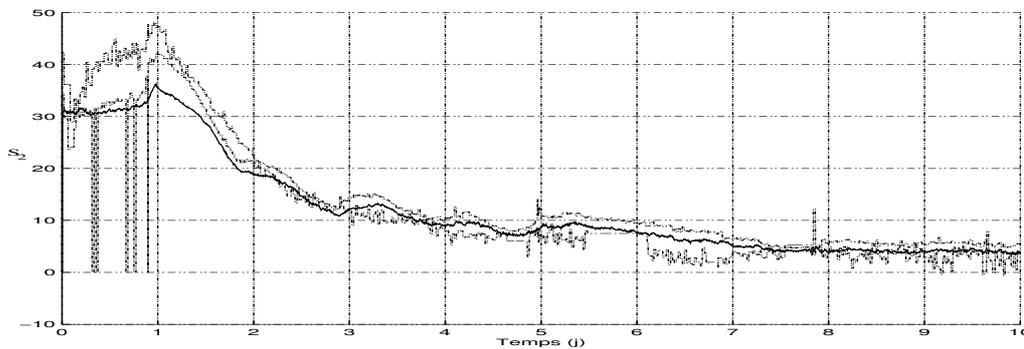


FIG. 9.22 – Evolution de  $S_1$

FIG. 9.23 – Evolution de  $S_2$ 

Il semble que le fait d'estimer 13 paramètres au cours du filtrage n'ait pas affecté sensiblement la qualité des estimations des substrats, comme le montrent les figures 9.22 et 9.23. Quant aux estimations des paramètres, elles se stabilisent rapidement, en général aux environs d'une cinquantaine de pas de temps. Cependant, si on recommence le filtrage, les valeurs obtenues pour les paramètres peuvent varier, sans toutefois, que ces variations ne se répercutent sur les estimations des substrats. Il existe donc différents jeux de paramètres équivalents pour ce système, qui semble être fini d'après nos expérimentations. A titre indicatif le tableau 9.1 resitue une des estimations possible des paramètres et les écart-types utilisés.

### 9.3 Conclusion du neuvième chapitre

Plusieurs aspects importants, sur le plan pratique, pour notre filtre à convolution avec ré-échantillonnage, ressortent de cette application à un procédé de digestion anaérobie. Tout d'abord, l'étape de simulation, a mis en avant une double robustesse : par rapport aux grandes dimensions de l'état, puisqu'il était de dimension six, et par rapport aux erreurs de modèles. Cependant, tant que l'on reste dans le cadre des simulations cette robustesse peut sembler toute relative. Or, le traitement de données réelles a confirmé les qualités constatées en simulation.

- Tout d'abord sur l'aspect robustesse par rapport aux erreurs de modèles et erreurs de mesures puisque, le modèle considéré pour représenter la bioréaction est nécessairement entaché d'erreurs et que la qualité des données varie sensiblement dans le temps.

Paramètre	Estimation	Paramètre	Estimation
$\mu_{max1}$	1.0695	$k_1$	41.2381
$\mu_{max2}$	0.4713	$k_2$	130.6217
$K_{S1}$	6.5279	$k_3$	260.7891
$K_{S2}$	9.6898	$k_4$	50.1992
$K_I^2$	314.4378	$k_5$	324.0013
$k_{la}$	20.3468	$k_6$	423.7462
$\alpha$	0.5582		

Ecart-type	Valeur utilisée	Ecart-type	Valeur utilisée
$a_1$	0.025	$a_5$	1.00
$a_2$	0.05	$a_6$	0.02
$a_3$	0.01	$a_7$	0.05
$a_4$	0.01	$a_8$	2.00

TAB. 9.1 – Estimations des paramètres et écart-types utilisés

- Ensuite, dans les cas 1 à 3, les variables d'états considérées étaient de dimension huit et il y avait huit paramètres inconnus. Les résultats obtenus sont assez convaincants dans la mesure où les approches déterministes généralement utilisées sur ce type de problèmes ne permettent pas d'en faire autant.

Le dernier cas traité, où l'incertitude sur les valeurs des 13 paramètres du modèle est prise en compte, sans causer trop de nuisances sur l'estimation, donne une bonne idée du potentiel du filtre.

Globalement, il ressort que les filtres à convolution, et plus généralement les filtres particuliers, peuvent apporter une aide significative à l'étude de ce type de bioprocédé. Cependant, il n'est pas raisonnable de conclure qu'ils doivent remplacer les approches déterministes utilisées en pratique. En effet, le bon fonctionnement des filtres particuliers nécessite une bonne connaissance du modèle. Dans notre cas, cette connaissance a été obtenue par des approches déterministes. Les filtres particuliers sont donc, dans le cas des bioprocédés, des outils complémentaires pertinents pour les approches déterministes.

# Conclusion

Les travaux présentés dans ce mémoire répondent à des problèmes de filtrage non linéaire, en s'appuyant sur la théorie de l'estimation non paramétrique. Les filtres à convolution proposés, pour traiter ces problèmes, sont étudiés tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. La validation sur le plan pratique de la technique étaient indispensable, car l'application à un réacteur de retraitement d'eaux usées était l'une des motivations de ce travail.

Le problème du filtrage, à savoir, l'estimation de l'état d'un système dynamique connaissant toutes les observations du passé, est abordé sous différents aspects : l'estimation de la loi conditionnelle de l'état, l'estimation de la valeur de l'état et l'estimation de paramètres inconnus lorsque le modèle est incertain.

Parmi les différentes techniques de filtrage existantes, exposées dans la première partie, nos filtres à convolution se classent dans la famille des filtres particuliers. Les filtres à convolution sont étudiés sur le plan théorique et sur le plan pratique pour ces diverses problématiques de filtrage. Il est important de rappeler que les résultats théoriques de consistance de nos filtres sont autonomes, par rapport à ceux des filtres particuliers, car ils s'appuient sur la théorie de l'estimation fonctionnelle. L'utilisation des noyaux de convolution permet, en outre, de se passer de l'hypothèse de connaissance de la forme analytique de la vraisemblance des observations, requise pour contruire les filtres particuliers. Malgré, leur fonctionnement sous des hypothèses plus faibles, les filtres à convolution révèlent des performances comparables, en simulation, à celles des filtres particuliers, lorsque ces derniers fonctionnent. En effet, certains systèmes faiblement bruités mettent en défaut les filtres particuliers usuels alors que ce n'est pas le cas pour les filtres à convolution. Leur capacité à supporter des systèmes dynamiques plus généraux que les filtres particuliers usuels, montre l'intérêt de nos filtres à convolution. De plus, l'adaptation du filtre à convolution avec ré-échantillonnage, au cas de systèmes dynamiques contenant des paramètres inconnus, fournit une estimation conjointe convergente état-paramètres, réalisable en ligne. Il n'existe pas d'équi-

valent, associant rigueur théorique et bonne performance en pratique. L'application du filtre à convolution avec ré-échantillonnage sur les données réelles issue du fonctionnement d'un bioréacteur du LBE de l'INRA à Narbonne, a mis en avant plusieurs points intéressants. Tout d'abord, la robustesse du filtre par rapport aux erreurs de modèle, aux incertitudes sur le modèle, aux données de mauvaise qualité et aussi à la dimension des variables d'états. Enfin pour les approches particulières en général, les résultats obtenus, laissent penser que ces méthodes ont toute leur place aux côtés des méthodes déterministes généralement utilisées sur les bioprocédés.

Citons à présent, sans prétention d'exhaustivité, quelques perspectives de travail, pour compléter notre contribution :

En premier lieu, nous avons rarement évoqué le problème du choix du noyau  $K$  et de la fenêtre  $h$  à utiliser. Pour tous les cas traités dans ce mémoire, nous n'avons fait aucun effort sur ces questions dans la mesure où les résultats obtenus avec des valeurs standard étaient déjà satisfaisants. Cependant, il serait certainement profitable à nos filtres d'optimiser ce choix, sans toutefois, perdre de vue qu'une utilisation en ligne n'autorise pas des procédures trop coûteuses en terme de temps de calcul.

Ensuite, une étude théorique complémentaire, en vue d'obtenir des résultats de type théorème centrale limite, permettrait de donner plus de précision sur le positionnement par rapport aux filtres particuliers.

L'extension aux systèmes dynamiques contrôlés, présentée au sixième chapitre, est un prolongement naturel de nos filtres. L'introduction de la variable de commande ne pose techniquement aucune difficulté. Cependant, la recherche d'une commande optimale soulève le problème de l'optimisation d'une fonction aléatoire ainsi que la question des propriétés théoriques des commandes ainsi obtenues.

# **Quatrième partie**

## **Annexes**



# Annexe A

## Eléments de théorie de l'estimation non paramétrique par noyaux de convolution

### A.1 Estimation de la densité

Il existe de nombreuses références sur les estimateurs non paramétriques de densité ou de régression. Les travaux de ce mémoire relatifs à ce domaine, s'appuient essentiellement sur Bosq et Lecoutre ([14]), Bosq ([15]), Devroye ([47]), Rao([110]) et Györfi & al. ([69]). Mais avant d'évoquer l'estimation non paramétrique, nous rappelons la définition des différentes formes de convergences stochastiques rencontrées dans cette thèse.

#### A.1.1 Convergences stochastiques

Nous considérons des suites  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  de variables aléatoires définies sur un même espace probabilisé  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ .

**Définition :** On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers 0 lorsque,  $n$  tend vers l'infini, si pour tout  $\varepsilon > 0$  on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(|X_n| > \varepsilon) = 0$$

Soit une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , alors on dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers  $X$ , si la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge en probabilité vers 0.

**Définition :** On suppose qu'il existe  $r > 0$  tel que pour tout  $n \geq 1$  le moment  $\mathbb{E}[|X_n|^r]$  soit fini. On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge en moyenne d'ordre  $r$  vers 0 si  $\mathbb{E}[|X_n|^r] \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Soit une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , alors on dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $X$  en moyenne d'ordre  $r$ , si la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge en moyenne d'ordre  $r$  vers 0.

**Remarque :** Cette convergence est surtout considérée pour  $r = 2$ , auquel cas on parle de convergence en moyenne quadratique.

**Définition :** On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0 presque sûrement, et l'on écrit  $X_n \rightarrow 0$  *p.s.*, s'il existe un ensemble  $P$ -négligeable  $N \in \mathcal{A}$  tel que pour tout  $\omega \in \Omega - N$ , on ait  $X_n(\omega) \rightarrow 0$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Soit une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , alors on dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $X$  presque sûrement, et l'on écrit  $X_n \rightarrow X$  *p.s.*, si la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge vers 0 presque sûrement.

**Définition :** On dit que la suite  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers 0 presque complètement, et l'on écrit  $X_n \rightarrow 0$  *p.co.*, si pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\sum_{i>1} P(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty$$

Soit une variable aléatoire  $X$  sur  $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ , alors on dit que  $(X_n)_{n \geq 1}$  converge vers  $X$  presque complètement, et l'on écrit  $X_n \rightarrow X$  *p.co.*, si la suite  $(X_n - X)_{n \geq 1}$  converge vers 0 presque complètement.

**Remarque :** On a les implications suivantes entre les différents types de convergence : *p.co.*  $\implies$  *p.s.*  $\implies$  *proba* et convergence en moyenne d'ordre  $r$   $\implies$  *proba*.

## A.1.2 Notations et formalisations

Les noyaux de convolution forment une famille d'applications adaptée à l'estimation de fonctions. Ils sont souvent notés  $K$ , de l'anglais Kernel.

**Définition :** Un noyau  $K$  est une application de  $\mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ , bornée, positive, symétrique, intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue et d'intégrale 1.

La contrainte de positivité imposée ici au noyau n'est pas obligatoire. Il est possible d'utiliser des noyaux négatifs sur une partie de leur support. Comme les estimateurs à noyaux de convolution sont utilisés dans cette thèse comme des outils au service du filtrage, il n'est pas nécessaire de se placer dans le contexte le plus général. Une grande variété de résultats est ainsi plus aisément accessible.

**Définition :** Un noyau de Parzen-Rosenblatt est un noyau vérifiant

$$\lim_{\|x\| \rightarrow \infty} \|x\|^d K(x) = 0$$

**Définition :** L'estimateur  $f_n$  associé à  $K$  de la densité  $f$  des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  indépendantes identiquement distribuées, est

$$f_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right) = (K_{h_n} * \mu_n)(x) \quad x \in \mathbb{R}^d$$

où  $h_n$  est un réel lié à  $n$ , souvent appelé largeur de la fenêtre et  $\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$  est la mesure empirique associée aux  $X_1, \dots, X_n$ . En d'autres termes,  $f_n$  est la densité empirique obtenue en régularisant la mesure empirique des  $X_1, \dots, X_n$ , par convolution avec  $\frac{1}{h_n^d} K(\frac{\cdot}{h_n})$ . Par commodité, la notation suivante est introduite

$$K_{h_n}(y) = \frac{1}{h_n^d} K\left(\frac{y}{h_n}\right) \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

Les résultats de convergence de  $f_n$  vers  $f$  sous différents modes, sont obtenus en rajoutant différentes hypothèses sur le noyau. Nous ne rappelons ici que les résultats utiles à notre approche du filtrage.

### A.1.3 Quelques résultats de convergences

**Lemme A.1.1 (Lemme de Bochner)** (i) Soit  $K$  un noyau de Parzen-Rosenblatt et  $g \in L^1$ , alors en tout point  $x$  où  $g$  est continue

$$\lim_{h \rightarrow 0} (g * K_h)(x) = g(x)$$

(ii) Soit  $K$  un noyau quelconque, si  $g \in L^1$  est uniformément continue, alors

$$\lim_{h \rightarrow 0} \sup_x |(g * K_h)(x) - g(x)| = 0$$

**Démonstration :** La démonstration proposée est tirée de Bosq & Lecoutre ([14])

(i) Comme l'intégrale de  $K_h$  vaut 1, nous avons

$$(g * K_h)(x) - g(x) = \int [g(x - y) - g(x)] K_h(y) dy.$$

En découpant l'intégrale par rapport à  $\delta > 0$  nous déduisons la majoration suivante :

$$\begin{aligned} |(g * K_h)(x) - g(x)| &\leq \sup_{\|y\| \leq \delta} |g(x - y) - g(x)| \int_{\|z\| \leq \delta h^{-1}} |K(z)| dz \\ &\quad + \int_{\|y\| > \delta} \frac{|g(x - y)|}{\|y\|^d} \left\| \frac{y}{h} \right\|^d K\left(\frac{y}{h}\right) dy \\ &\quad + |g(x)| \int_{\|y\| > \delta} |K_h(y)| dy \\ &\leq \sup_{\|y\| \leq \delta} |g(x - y) - g(x)| \int |K| \\ &\quad + \delta^{-d} \int |g| \sup_{\|z\| > \delta h^{-1}} \|z\|^d |K(z)| dz \\ &\quad + |g(x)| \int_{\|z\| > \delta h^{-1}} |K(z)| dz \end{aligned}$$

Or à  $\delta$  fixé, lorsque  $h$  tend vers zéro, les deux derniers termes tendent vers zéro. Enfin, lorsque  $\delta$  tend vers zéro, le premier terme tend vers zéro, d'où le résultat.

(ii) Le résultat découle de la majoration suivante

$$\begin{aligned} \sup_x |(g * K_h)(x) - g(x)| &\leq \sup_x \sup_{\|y\| \leq \delta} |g(x - y) - g(x)| \int |K| \\ &\quad + 2 \sup_x |g(x)| \int_{\|z\| > \delta |h|^{-1}} |K(z)| dz \end{aligned}$$

**Théorème A.1.1 (convergence en moyenne quadratique)** Si  $f_n$  est associée à un noyau de Parzen-Rosenblatt, on a

$$h_n \rightarrow 0, nh_n^d \rightarrow \infty \implies f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ en moyenne quadratique}$$

**Démonstration :** La démonstration proposée est tirée de Bosq & Lecoutre ([14]) L'erreur quadratique de  $f_n(x)$  s'écrit

$$\mathbb{E}[f_n(x) - f(x)]^2 = [\mathbb{E}f_n(x) - f(x)]^2 + V f_n(x)$$

or  $\mathbb{E}f_n(x) = (K_n * f)(x)$ . D'après le lemme de Bochner il en découle que le biais  $[\mathbb{E}f_n(x) - f(x)] \rightarrow 0$  lorsque  $h_n \rightarrow 0$ . De plus, par un calcul direct de la variance de  $f_n(x)$  on a

$$Vf_n(x) = \frac{1}{nh_n^d} (K_{h_n}^2 * f)(x) - \frac{1}{n} \mathbb{E}^2 K_{h_n}(X_1 - x)$$

On en déduit

$$nh_n^d Vf_n(x) = (K_{h_n}^2 * f)(x) - h_n^d \mathbb{E}^2 K_{h_n}(X_1 - x)$$

en appliquant le lemme de Bochner au noyau  $K_{h_n}^2 / \int K(y)^2 dy$  on obtient finalement :

$$nh_n^d Vf_n(x) \rightarrow f(x) \int K^2(y) dy$$

d'où le résultat.

**Théorème A.1.2 (convergence ponctuelle ps)** *Si  $K$  est noyau de Parzen-Rosenblatt, positif (i.e.  $K$  est une densité) et borné alors*

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^d}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x) \quad ps$$

en tout point  $x$  où  $f$  est continue.

**Démonstration :** voir [52] ou [110] pour une démonstration.

**Théorème A.1.3 (convergence uniforme ps)** *Si le noyau  $K$  est une densité bornée, si de plus*

- $\sup_x \|x\|^d K(x) < \infty$
- Il existe  $C > 0$ , tel que  $\sup_x |K(x+y) - K(x)| \leq C\|y\|$ ,  $y \in \mathbb{R}^d$
- La densité objectif  $f$  est uniformément continue et vérifie  $\int \|x\|^\gamma f(x) dx < \infty$  pour certains  $\gamma > 0$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^d}{\log n} = \infty \end{aligned} \implies \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f_n(x) - f(x)| = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** Ce résultat a été établi simultanément par plusieurs auteurs, une des formes les plus intéressante est due à Bertrand Retali ([12]). Une démonstration standard de ce théorème est réalisée dans ([110]).

**Corollaire A.1.3.1** *Sous les hypothèses du théorème A.1.3 on a aussi*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^d}{\log n} = \infty \quad \implies \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_x |f_n(x) - \mathbb{E}[f_n(x)]| = 0 \quad ps$$

**Démonstration :** voir [110] pour une démonstration.

Le théorème suivant (Glick[66]) permet de passer de la convergence ponctuelle à la convergence  $L_1$ .

**Théorème A.1.4 (Théorème de Glick)** *Si une suite de densités estimées  $f_n$  converge presque partout vers une densité  $f$  en probabilité (ou presque sûrement) alors  $\|f_n - f\|_{L_1} \rightarrow 0$  en probabilité (ou presque sûrement).*

**Démonstration :** Voir (Glick[66]) ou (Devroye[47]).

Le théorème de Glick nous sera utile par la suite. Nous utiliserons aussi le théorème suivant qui garantit la convergence  $L_1$  sous des conditions plus faibles.

**Théorème A.1.5 (équivalence des convergences (Devroye))** *Soit  $f_n$  un estimateur à noyau, avec un noyau-densité arbitraire  $K$  et  $h$  la largeur de la fenêtre ne dépendant uniquement que de  $n$ . Alors les propositions suivantes sont équivalentes :*

- (i)  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$  en probabilité pour certaines densités  $f$ .
- (ii)  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$  en probabilité pour toutes densités  $f$ .
- (iii)  $\int |f_n - f| \rightarrow 0$  presque sûrement pour toutes densités  $f$ .
- (iv) Pour tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $r, n_0$  ( $r$  indépendant de  $f$  et  $K$ ) tels que
 
$$P\left(\int |f_n - f| > \epsilon\right) \leq \exp(-rn), \quad n \geq n_0, \quad \forall f$$
- (v)  $\lim_{n \rightarrow \infty} h = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} nh^d = \infty$ .

**Démonstration :** La démonstration de ce résultat est l'objet de l'article de Devroye([48]). Elle est aussi présentée dans (Devroye[47]).

### Étude de la vitesse de convergence

Etablir un taux de convergence est un problème souvent délicat. Le cas de la dimension 1 est traité par Devroye ([47]) ou encore Devroye & Györfi ([51]). Or dans notre cas, la dimension est toujours supérieure à un. Les travaux de Holmström & Klemelä ([78]) généralisent ceux de Devroye & Györfi ([51]) au cas d'une dimension quelconque, ils nous serviront donc de point d'appui.

Avant d'énoncer des résultats précisant la vitesse de convergence, il est nécessaire d'introduire, comme dans ([51],[78]), quelques notations et notions particulières. Pour clarifier la lecture rappelons que  $d$  est la dimension de  $x$ .

Soient  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}^d$ ,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $D_i f = \partial f / \partial x_i$  la  $i^{\text{ème}}$  dérivée partielle d'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}^d$ , on note :

$$\begin{aligned} |\alpha| &= \alpha_1 + \dots + \alpha_d \\ \alpha! &= \alpha_1! \dots \alpha_d! \\ x^\alpha &= x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \\ D^\alpha f &= D_1^{\alpha_1} \dots D_d^{\alpha_d} f \end{aligned}$$

Enfin, l'espace de Sobolev des fonctions dont les dérivées partielles au sens des distributions  $D^\alpha f$ , avec  $|\alpha| \leq s$  sont intégrables, est noté  $W^{s,1}$ .

**Définition A.1.1 (Noyau de classe  $s$ )** Soit  $s \geq 1$ . Un noyau de classe  $s$  est une fonction Borel-mesurable  $K$  telle que

$$(i) \quad K \text{ est symétrique, i.e., } K(-x) = K(x), \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$$(ii) \quad \int K = 1$$

$$(ii) \quad \int x^\alpha K(x) dx = 0 \text{ si } 1 \leq |\alpha| \leq s - 1$$

$$(iv) \quad \int x^\alpha |K(x)| dx < \infty \text{ si } |\alpha| = s$$

$K$  peut être négatif, ce n'est donc pas forcément une densité.

La distance  $L_1$  entre une densité et son estimation par noyau de convolution se décompose de la manière suivante

$$\int |f_n - f| \leq \int |f_n - f * K_{h_n}| + \int |f - f * K_{h_n}|$$

où seulement le premier terme du membre de droite est stochastique. En conséquence on a

$$E\left(\int |f_n - f|\right) \leq E\left(\int |f_n - f * K_{h_n}|\right) + \int |f - f * K_{h_n}|$$

Le terme  $\int |f - f * K_{h_n}|$  est appelé biais de l'estimateur et  $E\left(\int |f_n - f * K_{h_n}|\right)$  la variation de l'estimateur à noyau.

Les premiers théorèmes présentés caractérisent la borne supérieure du biais. La notion de noyau de classe  $s$  a été introduite, car elle constitue la base de tous ces théorèmes. Mais avant d'exposer les résultats de convergence, il faut définir la notion de noyau associé car elle intervient dans la borne supérieure du biais.

**Définition A.1.2 (Noyau associé)** Soient  $s \geq 1$  et  $|\alpha| = s$ , on suppose que  $K$  est un noyau de classe  $s$ . Le  $\alpha$ -noyau associé à  $K$  est défini pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$  par

$$\begin{aligned} L^\alpha(x) &= (-1)^{|\alpha|} \int_1^\infty \frac{(t-1)^{|\alpha|-1}}{(|\alpha|-1)!} t^{d-1} x^\alpha K(tx) dt \\ &= (-1)^s \int_1^\infty \frac{(t-1)^{s-1}}{(s-1)!} t^{d-1} x^\alpha K(tx) dt \end{aligned}$$

**Théorème A.1.6 (Holmström & Klemelä [78])** Soient  $s \geq 1$  et  $K$  un noyau de classe  $s$ . Pour toute fonction  $f \in W^{s,1}$  et  $h > 0$  on a

$$\int |f * K_{h_n} - f| \leq h^s \phi_1(s, K, f)$$

avec

$$\phi_1(s, K, f) = \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} |D^\alpha f| \int_{\mathbb{R}^d} |L^\alpha|$$

On a toujours  $\phi_1(s, K, f) < \infty$  et  $\phi_1(s, K, f) > 0$  sauf si  $f \equiv 0$  presque partout.

Holmström & Klemelä([78]) ont aussi démontré les deux autres résultats, plus fins, présentés ci-dessous.

**Théorème A.1.7** Soient  $s \geq 1$  et  $K$  un noyau de classe  $s$ . Pour toute fonction  $f \in W^{s,1}$ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0_+} h^{-s} \int |f * K_{h_n} - f| = \int \left| \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \int_{\mathbb{R}^d} L^\alpha \right|.$$

**Corollaire A.1.7.1** Soient  $s \geq 1$  et  $K$  un noyau de classe  $s$ . Pour toute fonction  $f \in W^{s,1}$  et pour  $h$  proche de  $0_+$

$$\int |f * K_{h_n} - f| = O(h^s).$$

**Théorème A.1.8** Soient  $s \geq 1$  et  $K$  un noyau de classe  $s$ . Pour toute fonction  $f \in W^{s,1}$ ,

(i) Si  $s$  est impair, alors pour  $h > 0$ ,

$$\int |f * K_{h_n} - f| = \delta(h)h^s$$

où  $\delta(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0_+$ .

(ii) Si  $s$  est pair et  $\int x^\alpha K(x)dx \neq 0$  pour certains  $|\alpha| = s$  alors pour  $h > 0$ ,

$$\int |f * K_{h_n} - f| = (1 - \delta(h))\phi_2(s, K, f)h^s$$

avec  $\delta(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0_+$  et

$$\phi_2(s, K, f) = \int \left| \sum_{|\alpha|=s} \frac{s!}{\alpha!} \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha f \int_{\mathbb{R}^d} x^\alpha K(x)dx \right|$$

On a toujours  $\phi_2(s, K, f) < \infty$  et  $\phi_2(s, K, f) > 0$  sauf si  $f \equiv 0$  presque partout.

**Corollaire A.1.8.1** Soient  $s \geq 1$  et  $K$  un noyau de classe  $s$ . Pour toute fonction  $f \in W^{s,1}$  et pour  $h$  proche de  $0_+$

(i) Si  $s$  est impair,

$$\int |f * K_{h_n} - f| = o(h^s).$$

(ii) Si  $s$  est pair et  $\int x^\alpha K(x)dx \neq 0$  pour certains  $|\alpha| = s$ ,

$$\int |f * K_{h_n} - f| = O(h^s).$$

Afin de caractériser complètement l'espérance de l'erreur  $L_1$ , il reste encore à énoncer un résultat sur la variation de l'estimateur.

**Théorème A.1.9** Soient une densité  $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$  et un noyau  $K \in L_1(\mathbb{R}^d)$ . Si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a  $\int \|x\|^{d+\varepsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{d+\varepsilon}) f(x) dx < \infty$  alors pour tout  $h > 0$ ,

$$\mathbb{E}\left[\int |f_{n,h} - f * K_{h_n}| \right] \leq (1 + \delta(h))(nh^d)^{-1/2} \sqrt{\int K^2} \int \sqrt{f},$$

où  $\delta(h) \rightarrow 0$  quand  $h \rightarrow 0_+$ .

**Corollaire A.1.9.1** sous les mêmes hypothèses,

$$\mathbb{E}\left[\int |f_{n,h} - f * K_{h_n}| \right] = O(1/\sqrt{nh^d})$$

Il est enfin possible de préciser la vitesse de convergence de l'espérance de l'erreur  $L_1$ , d'un estimateur de densité à noyau de convolution.

**Théorème A.1.10 (vitesse de convergence)** Soient une densité  $f \in W^{s,1}$  et un noyau  $K \in L_1(\mathbb{R}^d)$  de classe  $s \geq 1$ . Si pour certains  $\varepsilon > 0$  on a  $\int \|x\|^{d+\varepsilon} K(x)^2 dx < \infty$  et  $\int (1 + \|x\|^{d+\varepsilon}) f(x) dx < \infty$  alors pour tout  $h_n > 0$  on a

$$\mathbb{E}\left[\int |f_n - f| \right] \leq h_n^s \phi_1(s, K, f) + (1 + \delta(h_n))(nh_n^d)^{-1/2} \sqrt{\int K^2} \int \sqrt{f}$$

**Corollaire A.1.10.1** Sous les mêmes hypothèses,

$$\mathbb{E}\left[\int |f_n - f| \right] = O(h_n^s) + O(1/\sqrt{nh_n^d})$$

## A.2 Estimation de l'espérance

Le cas de la régression non linéaire se formalise de la même manière que l'estimation de densité : soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires de loi  $\mu$ . Cette fois, l'objectif est de trouver une application mesurable  $r$  telle que  $r(X)$  soit le plus proche de  $Y$  au sens des moindres carrés. La solution de ce problème est  $\mathbb{E}[Y|X]$  lorsque cette quantité existe. Pour assurer l'existence de  $r$ , il est nécessaire de supposer que  $\mathbb{E}|Y| < \infty$ .  $r$  est une version déterminée de la fonction  $x \mapsto \mathbb{E}[Y|x]$ . La question de son unicité est ici éludée.

### A.2.1 Notations et formalisations

Pour estimer  $r$  par la méthode des noyaux, il faut supposer que la loi  $\nu$  de  $X$  admet une densité  $f$ . Alors en tout point où  $f$  est non nulle

$$r(x) = \frac{\phi(x)}{f(x)} \text{ avec } \phi(x) = \int y d\mu(x, y)$$

Il est alors possible de construire les estimateurs de  $f$  et  $\phi$  associés au noyau  $K$  :

$$\begin{aligned} f_n(x) &= (K_{h_n} * \nu_n)(x) \\ \phi_n(x) &= \int y K_{h_n}(x - t) d\mu_n(t, y) \end{aligned}$$

où  $\nu_n$  et  $\mu_n$  sont les mesures empiriques associées à  $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$  :

$$\mu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{(X_i, Y_i)} \text{ et } \nu_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_{X_i}$$

Nous obtenons alors l'estimateur de  $r$ ,  $r_n(x) = \phi_n(x)/f_n(x)$ , soit sous forme plus explicite

$$r_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^n Y_i K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}{\sum_{i=1}^n K\left(\frac{x-X_i}{h_n}\right)}.$$

Dans la littérature,  $r_n$  est souvent rencontré sous le nom d'estimateur de Nadaraya-Watson ; cet estimateur a de bonnes propriétés asymptotiques. En effet, selon les hypothèses imposées au noyau  $K$ , la convergence en probabilité, presque complète ou en norme  $L^p$  vers  $r$  ont été démontrées (cf. Bosq [14], Sarda & Vieu[118] ou Györfi & al.[69]). Ferraty & Vieu[62] proposent une étude complète et pédagogique des propriétés de  $r_n$ .

### A.2.2 Quelques résultats de convergence

Les théorèmes énoncés dans cette partie sont tirés de Györfi & al.[69]). On peut s'y référer pour les démonstrations qui sont aussi détaillées dans ([62]) .

Sauf indication contraire, les hypothèses suivantes sont toujours supposées vérifiées dans les théorèmes qui suivent :

H1 -  $x$  est un point fixé de  $\mathbb{R}^d$  tel que  $f(x) > 0$ .

H2 -  $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{nh_n^d}{\log n} = \infty$ .

H3 - Le noyau  $K$  est borné, intégrable et à support compact.

H4 -  $|Y| < M < \infty$

Comme pour le cas de l'étude de la vitesse de convergence des estimateurs des densités, la notion de noyau de classe  $s$  est une hypothèse fondamentale.

**Théorème A.2.1 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de dérivabilité)** *Si H1-H4 sont vérifiées, si  $r$  et  $f$  sont  $s$  fois ( $s > 0$ ) continûment différentiables autour de  $x$  et si  $K$  est de classe  $s$  alors*

$$r_n(x) - r(x) = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}\right), \quad p.co$$

Le terme *p.co* désigne la convergence presque complète.

**Remarque :** Il est possible d'affaiblir l'hypothèse H4, en la remplaçant par une hypothèse de bornitude sur  $\mathbb{E}[|Y|]$  (cf. Györfi & al.[69]).

Avant de donner le théorème suivant, rappelons la définition d'une fonction  $\beta$ -lipschitzienne :

$$\exists \beta > 0, \exists \alpha < \infty, \exists \epsilon > 0 : \forall y \in ]x - \epsilon, x + \epsilon[, |\phi(x) - \phi(y)| \leq \alpha \|x - y\|^\beta$$

**Théorème A.2.2 (Vitesse de convergence ponctuelle sous condition de Lipschitz)** *Si H1-H4 sont vérifiées et si  $r$  et  $f$  sont  $\beta$ -lipschitziennes alors*

$$|r_n(x) - r(x)| = O(h_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}\right), \quad p.co$$

### Vitesses de convergence uniforme

Les théorèmes énoncés dans la suite précisent des vitesses de convergence uniforme. A présent,  $x$  appartient à un compact  $C$  de  $\mathbb{R}^d$ . A l'hypothèse H1, émise pour les convergences ponctuelles se substitue l'hypothèse H5 définie ci-dessous. Une hypothèse sur le noyau est aussi ajoutée :

H5 - Il existe  $m > 0$  tel que  $\inf_{x \in C} f(x) > m$

H6 - Le noyau  $K$  est  $\beta$ -lipschitzien sur  $C$  :

$$\exists \beta > 0, \exists \alpha < \infty, : \forall x, y \in C, |K(x) - K(y)| \leq \alpha \|x - y\|^\beta$$

**Théorème A.2.3 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de dérivabilité)** *Si les hypothèses H2-H6 sont vérifiées, si  $r$  et  $f$  sont  $s$  fois, ( $s > 0$ ), continûment différentiables dans  $C$  et si  $K$  est d'ordre  $s$ , alors*

$$\sup_{x \in C} |r_n(x) - r(x)| = O(h_n^s) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}\right), \quad p.co$$

**Théorème A.2.4 (Vitesse de convergence uniforme sous condition de Lipschitz)**

Si les hypothèses H2-H6 sont vérifiées et si  $r$  et  $f$  sont  $\beta$ -lipschitziennes sur  $C$  alors

$$\sup_{x \in C} |r_n(x) - r(x)| = O(h_n^\beta) + O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}\right), \quad p.co$$

**Vitesse optimale en  $h$** 

Le choix d'un  $h$  optimal se fait en cherchant le  $h$  qui minimise les vitesses établies par les théorèmes A.2.3 ou A.2.4. Pour cela, il faut dériver par rapport à  $h$  les expressions des vitesses et chercher le zéro des dérivées.

**Corollaire A.2.4.1 (vitesse optimale) Soit**

$$h = \alpha \left(\frac{n}{\log n}\right)^{-\frac{1}{4+d}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

alors, sous les hypothèses du théorème A.2.1 on a

$$r_n(x) - r(x) = O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{-s}{2s+d}}\right) \quad p.co$$

et sous les hypothèses du théorème A.2.3 on a

$$\sup_{x \in C} |r_n(x) - r(x)| = O\left(\left(\frac{n}{\log n}\right)^{\frac{-s}{2s+d}}\right) \quad p.co$$

Sarda & Vieu ([118]) établissent aussi les vitesses de convergence en moyenne quadratique :

**Théorème A.2.5** *Supposons les conditions suivantes vérifiées :*

- $f(x) > 0$ ,  $x$  point fixé de  $\mathbb{R}^d$ .
- $r$  et  $f$  sont deux fois continûment différentiables au voisinage de  $x$ .
- $\lim_{n \rightarrow \infty} h_n = 0$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} nh_n^d = \infty$ .
- $u \mapsto \mathbb{E}[Y^2|u]$  est continue au point  $x$ .
- $K$  est borné, intégrable, positif, symétrique et à support compact.
- $K$  est un noyau d'ordre 2.

Alors

$$\mathbb{E}[r_n(x) - r(x)]^2 = O(h_n^4) + O(1/(nh_n^d)) + o(h_n^4 + 1/(nh_n^d))$$

La vitesse optimale s'en déduit facilement :

**Théorème A.2.6** *Supposons les hypothèses du théorème A.2.5 vérifiées :*

*Alors en prenant*

$$h = \alpha n^{-\frac{1}{4+d}}, \quad 0 < \alpha < \infty$$

*on a*

$$\mathbb{E}[r_n(x) - r(x)]^2 = O(n^{-\frac{4}{4+d}})$$

# Annexe B

## Algorithmes

### B.1 Minimisation Stochastique de Fabian

Cet algorithme généralise l'algorithme d'optimisation stochastique de Kiefer-Wolfowitz, premier du nom. Il se définit de la façon suivante (Cf. Fabian [61]) :

Soit  $V(x)$  la fonction à minimiser. On ne peut qu'observer des réalisations des fonctions aléatoires de  $x$ ,  $Z(x)$ , telles que  $\mathbb{E}[Z(x)] = V(x)$ . Soit le processus itératif suivant, avec  $x_0$  point de départ :

$$x_{k+1} = x_k + a_k W_k \quad x_k \in \mathbb{R}^m$$

•  $\{a_k\}$  est une suite positive décroissante de la forme :  $a_k = a/k^\alpha$  avec  $a > 0$  et  $0 < \alpha \leq 1$

•  $W_k = \sum_{i=1}^h v_i W_{ki}$

avec

$h$ , tel que les dérivées partielles de  $V(\cdot)$  soient bornées jusqu'à l'ordre  $2h + 1$

$W_{ki}$ , gradient stochastique de dimension  $m$ , où pour  $j = 1, \dots, m$ ,  $W_{ki}^j$  est défini comme la moyenne de  $n_i$  variations stochastiques :

$$W_{ki}^j = \frac{1}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} [Z(x_k + c_k u_i e_j) - Z(x_k - c_k u_i e_j)] / 2c_k$$

$c_k = c/k^{1/(4h+2)}$  avec  $c > 0$ ,  $\{u_i\} : 0 < u_1 < \dots < u_h \leq 1$  et  $e_j$  le  $j^{\text{ème}}$  vecteur canonique de  $\mathbb{R}^m$ .

$v = (v_1, \dots, v_h)' = U^{-1}\varepsilon$  avec  $U = [\{u_i^{2j-1}\}]$  pour  $i, j = 1, \dots, h$  et  $\varepsilon = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^h$ .

Pour déterminer les coefficients  $u_i$ , une manière approximativement optimale est définie selon Fabian par les équations

$$\begin{aligned} u_i &= \cos[(h-i)\pi/(2h-1)] \quad i = 1, \dots, h \\ \mu_i &= [2h(h-1) + 1/2]^{-1} u_i^{-2} (1 - \delta_{hi}/2) \quad i = 1, \dots, h \\ \mu_i &= n_i/N \\ N &= \sum_{i=1}^h n_i \end{aligned}$$

Les paramètres  $a, c, \alpha, N$  et  $h$  sont au choix de l'utilisateur. La prise en main de cette procédure de minimisation n'est donc pas aisée. Un grand nombre d'essais est nécessaire avant d'obtenir de bons résultats.

Pour l'étude des propriétés de convergence de l'algorithme voir Fabian([61]).

## B.2 Algorithme du filtre avec sélection

Soit le système dynamique :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

L'algorithme suivant, fournit une estimation convergente de  $p(x_t | \mathcal{B}_\varepsilon(y_{1:t}))$  :

Soit un instant  $t$  fixé, posons  $i = 1$  :

Tant que  $i \leq n$

$k = 1$  Initialisation

$$x'_0 \sim \pi_0$$

$$S : x'_0 \rightarrow (x'_1, y'_1)$$

Si  $\|y'_1 - y_1\| < \epsilon : k = k + 1$

Sinon : retour à l'initialisation

$k > 1$

$$S : x'_{k-1} \rightarrow (x'_k, y'_k)$$

Si  $\|y'_k - y_k\| < \epsilon$  et  $k = t : \tilde{x}_t^i = x'_k$  et  $i = i + 1$

Si  $\|y'_k - y_k\| < \epsilon$  et  $k < t : k = k + 1$

Sinon : retour à l'initialisation

fin du Tant que

### B.3 Algorithme du filtre avec ré-échantillonnage

Soit le système dynamique :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \eta_t) \end{cases}$$

L'algorithme suivant, fournit une estimation convergente de  $p(x_t | y_{1:t})$  :

$$p_0^n = p_0 \text{ et } t \geq 0 :$$

Etape 1 : Génération de  $n$  états

$$\bar{x}_t^i \sim p_t^n \text{ pour } i = \dots, n$$

Etape 2 : Génération des  $n$  particules

Pour tout  $i = \dots, n$  on obtient  $\tilde{z}_{t+1}^i = (\tilde{x}_{t+1}^i, \tilde{y}_{t+1}^i)$   
en appliquant le système (3.2) à  $\bar{x}_t^i$ .

Etape 3 : Estimation du filtre optimal :

$$p_{t+1}^n(x_{t+1}|y_{1:t+1}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(z_{t+1}, \tilde{z}_{t+1}^i)}{\sum_{i=1}^n K_{h_n}(y_{t+1}, \tilde{y}_{t+1}^i)}$$

$t = t + 1$  puis retour à l'étape 1

## B.4 Algorithme de filtrage pour des systèmes dynamiques paramétrés

Soit le système dynamique :

$$S : \begin{cases} x_t = f_t(x_{t-1}, \theta_x, \varepsilon_t) \\ y_t = h_t(x_t, \theta_y, \eta_t) \end{cases}$$

Soit  $\theta = (\theta_x, \theta_y)$ . L'algorithme suivant, fournit des estimations convergentes de  $p(x_t, \theta|y_{1:t})$ ,  $p(x_t|y_{1:t})$  et  $p(\theta|y_{1:t})$  :

**Initialisation** :  $t = 1$

- Génération des trajectoires : pour  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} \bar{x}_0^i &\sim p_0(x), \bar{\theta}_0^i \sim p_0(\theta), \tilde{\varepsilon}_0^i \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_0}, \tilde{\eta}_1^i \sim \mathcal{L}_{\eta_1} \\ \tilde{x}_1^i &= f_1(\bar{x}_0^i, \bar{\theta}_0^i, \tilde{\varepsilon}_0^i) \\ \tilde{y}_1^i &= h_1(\tilde{x}_1^i, \bar{\theta}_0^i, \tilde{\eta}_1^i) \\ \tilde{\theta}_1^i &= \bar{\theta}_0^i \end{aligned}$$

- Estimation des densités :

$$\widehat{p}_1^n(x, \theta | y_1) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_h(\tilde{\theta}_1^i - \theta) \times K_h(\tilde{x}_1^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1)}$$

$$\widehat{p}_1^n(\theta | y_1) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_h(\tilde{\theta}_1^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1)}$$

$$\widehat{p}_1^n(x | y_1) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1) \times K_h(\tilde{x}_1^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_1^i - y_1)}$$

-t = t + 1

**Etape 1** : t > 1

- Génération des trajectoires : pour  $i = 1, \dots, n$

$$\begin{aligned} (\tilde{x}_{t-1}^i, \tilde{\theta}_{t-1}^i) &\sim \widehat{p}_{t-1}^n(x, \theta | y_{1:t-1}), \tilde{\varepsilon}_{t-1}^i \sim \mathcal{L}_{\varepsilon_{t-1}}, \tilde{\eta}_t^i \sim \mathcal{L}_{\eta_t} \\ \tilde{x}_t^i &= f_t(\tilde{x}_{t-1}^i, \tilde{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\varepsilon}_{t-1}^i) \\ \tilde{y}_t^i &= h_t(\tilde{x}_t^i, \tilde{\theta}_{t-1}^i, \tilde{\eta}_t^i) \\ \tilde{\theta}_t^i &= \tilde{\theta}_{t-1}^i \end{aligned}$$

- Estimation des densités :

$$\widehat{p}_t^n(x, \theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta) \times K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\widehat{p}_t^n(\theta | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_h(\tilde{\theta}_t^i - \theta)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

$$\widehat{p}_t^n(x | y_{1:t}) = \frac{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t) \times K_h(\tilde{x}_t^i - x)}{\sum_{i=1}^n K_h(\tilde{y}_t^i - y_t)}$$

-t = t + 1

Retour à l'étape 1.



## Annexe C

# Présentation des procédés biotechnologiques

Les grands principes des procédés biotechnologiques sont exposés dans cette annexe. Pour une présentation plus détaillée, on peut se reporter à Bastin & Dochain ([7]).

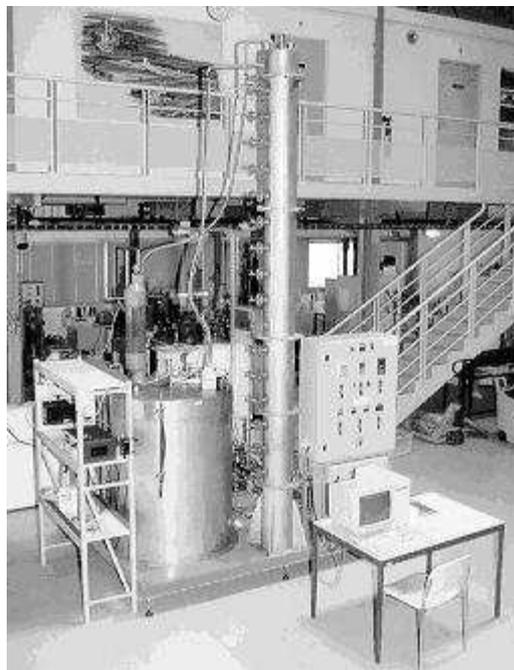


FIG. C.1 – Bioréacteur de retraitement d'eaux usées

## C.1 Description d'un bioprocédé

La présentation, inspirée de Hilgert ([75]) et Wagner ([127]), va se limiter au cas d'un processus conduit en bioréacteur : enceinte au sein de laquelle se déroule un ensemble de réactions biologiques dans un milieu liquide (cf. Fig. C.1). Ce type de processus est schématisé par la réaction générique suivante :



Les substrats sont des nutriments introduits dans le bioréacteurs, la matière polluante dans le cas d'une dépollution biologique . Les biomasses sont constituées de micro-organismes présents dans le bioréacteur. Sous des conditions physico-chimiques appropriées (pH, température, . . .), les biomasses se développent en consommant les substrats et en générant divers produits.

Ce type de bioprocédé peut avoir des finalités assez variées, par exemple : la production de biomasse (levure), la production d'un composé principal (alcool, yaourt, antibiotique, . . .), la dépollution biologique (consommation des substances polluantes par la biomasse), . . .

Dans la pratique, on rencontre trois principaux modes opératoires, caractérisés selon le mode d'alimentation en substrat :

- *Le mode discontinu ou batch*. La totalité des éléments nutritifs est introduite au lancement du procédé. Aucune modification n'est réalisée sur le contenu du réacteur, jusqu'à l'arrêt du procédé par épuisement des substrats. L'opérateur agit seulement sur les conditions environnementales du milieu réactionnel.

- *Le mode semi-continu ou fedbatch*. Il se distingue du précédent par un apport étalé des différents éléments nutritifs en fonction d'objectifs de conduite. Même principe d'arrêt que le mode batch

- *Le mode continu*. L'alimentation du réacteur (substrat en solution) est faite en continu. Un flux volumique équivalent est retiré en sortie. Le contenu du réacteur conserve ainsi un volume constant.

Ce mode de fonctionnement permet de traiter de gros volumes avec des réacteurs de taille modeste. Il est très répandu dans les domaines agro-alimentaire, pharmaceutique, . . .

## C.2 Modélisation par bilan de matière

### Les équations d'états

Pour simplifier la présentation, considérons le cas d'un seul substrat  $S$ , transformé par une seule biomasse  $B$ . Soit  $V$  le volume réactionnel. Le principe de conservation de la masse permet de modéliser l'évolution du substrat et de la biomasse par le système d'équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d(BV)}{dt} = r_B V - Q_{out} B \\ \frac{d(SV)}{dt} = -r_S V + Q_{in} S_{in} - Q_{out} S \\ \frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \end{cases}$$

$S$  et  $B$  désignent les concentrations en substrat et en biomasse.

$Q_{in}$ ,  $Q_{out}$  sont les débits d'alimentation et de soutirage du réacteur.

$S_{in}$  est la concentration en substrat entrant dans le réacteur.

$r_S$  et  $r_B$  sont respectivement les vitesses de croissance de la biomasse et consommation du substrat.

$V$  est le volume du contenu du réacteur.

Les débits  $Q_{in}$  et  $Q_{out}$  sont directement caractérisés par le mode de fonction du procédé :

Procédé discontinu	:	$Q_{in} = Q_{out} = 0$
Procédé semi-continu	:	$Q_{in} \neq 0, Q_{out} = 0$
Procédé continu	:	$Q_{in} = Q_{out} \neq 0$

La figure C.2 présente un schéma de réaction type avec un seul substrat et une seule biomasse.

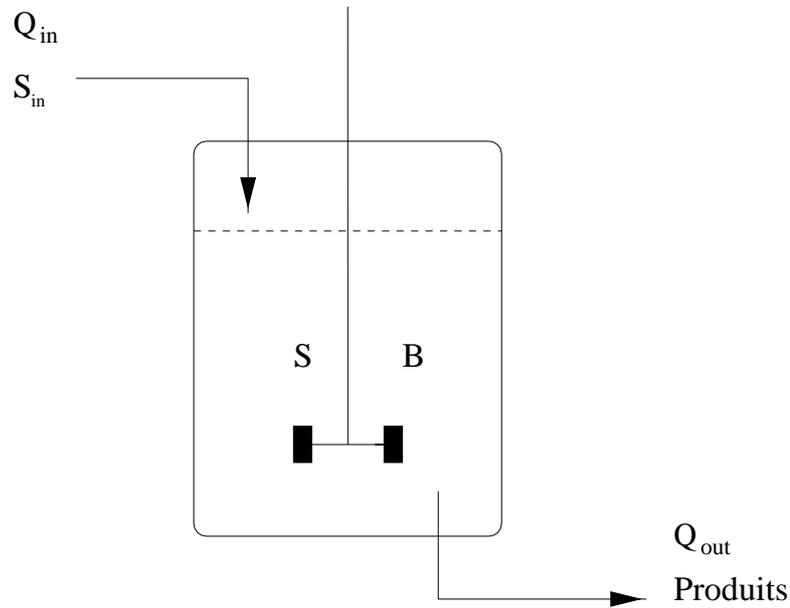


FIG. C.2 – Schéma d'un bioréacteur

### Les paramètres cinétiques

La vitesse de croissance  $r_B$  de la biomasse, introduite ci-dessus, est définie par

$$r_B = \frac{1}{V} \frac{d(BV)}{dt}$$

Le *taux de croissance* spécifique,  $\mu$  est la vitesse ramenée à l'unité de biomasse :

$$\mu = \frac{1}{BV} \frac{d(BV)}{dt}$$

La vitesse de consommation du substrat,  $r_S$ , est généralement exprimée en fonction de  $r_B$  :

$$r_S = \frac{r_B}{\tau}$$

où  $\tau \in ]0, 1[$  est le rendement de conversion substrat-biomasse.

A l'aide de ces nouvelles quantités, il est possible de réécrire les équations caractérisant l'évolution des concentrations en biomasse et substrat :

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = (\mu - \frac{Q_{out}}{V})B \\ \frac{dS}{dt} = -\frac{\mu B}{\tau} + \frac{Q_{in}}{V}S_{in} - \frac{Q_{out}}{V}S \\ \frac{dV}{dt} = Q_{in} - Q_{out} \end{cases}$$

Le taux de croissance  $\mu$  joue un rôle important. Les microbiologistes se sont attachés à le modéliser. Il est dépendant de nombreux facteurs. Le paragraphe suivant présente les modèles de taux de croissance les plus fréquemment utilisés.

### Le taux de croissance de biomasse

- La loi de croissance la plus couramment utilisée, est celle introduite par Michaelis & Menten en 1913 et reprise par Monod([101]) en 1942 :

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{S + K_S}$$

Où  $\mu_{max}$  est le taux de croissance maximal et  $K_S$  la constante de saturation. La particularité de cette loi est d'être nulle lorsqu'il n'y a plus de substrat à consommer.

- Pour prendre en considération les phénomènes d'inhibition causés par de trop fortes concentrations en substrat, Haldane([70]) en 1930, puis Andrews([5]) en 1968, proposent la loi suivante :

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{S + K_S + \frac{S^2}{K_I}}$$

où  $K_I$  est la constante d'inhibition.

- Afin de prendre en compte les effets conjoints de la biomasse et du substrat, Contois([23]) a proposé en 1959 un nouveau modèle :

$$\mu = \mu_{max} \frac{S}{S + K_S B}$$

Un très grand nombre de lois de croissance plus spécifiques sont proposées dans la littérature. Bastin & Dochain([7]) recensent la plupart d'entre elles.

### Principale difficulté

Les modèles obtenus par bilan de matières contiennent systématiquement un grand nombre de paramètres inconnus liés au problème considéré et aux conditions environnementales, par exemple,  $\tau$ ,  $\mu_{max}$ ,  $K_S$ ,  $K_I$ , . . . . Lorsque, selon les réactions, le nombre de biomasses ou de substrats augmente, le nombre de paramètres augmente en conséquence. Une grande partie du travail de modélisation doit alors être consacrée à l'estimation de ces paramètres.

Les filtres par convolution que nous avons introduits sont intéressants dans cette perspective. En effet, ils offrent la possibilité, comme on l'a vu au neuvième chapitre, d'estimer de manière globale tous les paramètres inconnus ou de filtrer avec de "mauvaises" valeurs de paramètres sans grande incidence sur la qualité des estimations d'état recherchées.

# Bibliographie

- [1] C. Abraham, G. Biau, B. Cadre, “Simple estimation of the mode of a multivariate density”. *The Canadian Journal of Statistics*, vol. 31, p. 23–34, (2003).
- [2] C. Abraham, G. Biau, B. Cadre, “On the asymptotic of a simple estimate of the mode”. *ESAIM : Probability and Statistics*, vol. 8, p. 1–11, (2004).
- [3] H. Akashi, H. Kumamoto, K. Nose, “Application of Monte Carlo Methods to Optimal Control for Linear Systems under Measurement Noise with Markov Dependent Statistical Property. *International Journal on Control*, vol.22, no. 6, p821-836 (1975).
- [4] A. Alessandri, T. Parisini, R. Zoppoli, “Neural approximators for nonlinear finite-memory state estimation”. *International Journal of Control*, vol. 67, no. 2, p275-301 (1997).
- [5] J.F. Andrews, “A mathematical model for continuous culture of microorganisms utilizing inhibitory substrates”, *Biotech. and Bioeng.*, vol 10, p707-723 (1968).
- [6] N. Bartoli, P. Del Moral, *Simulation & algorithmes stochastiques*. Cépaduès-éditions, Toulouse (2002).
- [7] G. Bastin, D. Dochain, *On-line Estimation and Adaptive Control of Bioreactors*. Elsevier, (1990).
- [8] A. Berlinet ; A. Gannoun, E. Matzner-Lober, “Normalité asymptotique d’estimateurs convergents du mode conditionnel”. *La revue Canadienne de Statistique*, no. 26, p365-381 (1998).
- [9] O. Bernard, Z. Hadj-Sadok, D. Dochain, A. Genovesi, J-P Steyer, “Dynamical Model Development and Parameter Identification for an Anaerobic Wastewater Treatment Process “. *Biotechnology and Bioengineering*, vol. 75, no. 4, (2001).

- [10] O. Bernard, L. Mailleret, J.L. Gouzé, B. Chachuat, O. Schoefs, U. Zaher, J.P. Steyer, “Design of models for normal working conditions”. Rapport de recherche, projet TELEMAT, INRIA IST 2000-28156, TELEMAT Deliverable D3.1a, sept (2002).
- [11] J.M. Bernardo, A.F.M Smith, *Bayesian Theory*. John Wiley, New York (1994).
- [12] M. Bertrand Retali, “Convergence uniforme d’un estimateur de la densité par la méthode du noyau”. revue Roumaine Math. Pures et Appliquées, 23, p361-385 (1978).
- [13] C. Berzuini, N. Best, W. Gilks, C. Larizza, “Dynamic Conditionnal Independence Models and Markov Chain Monte Carlo Methods”. Journal of the American Statistical Association, 92(440), p1403-1412 (1997).
- [14] D. Bosq, J-P. Lecoutre, *Théorie de l’estimation fonctionnelle*. Economica, Paris (1987).
- [15] D. Bosq, *Nonparametric Statistics for Stochastic Processes*. Lecture Notes in Statistics 110, Springer (1996)
- [16] R. Cerf, “Une théorie asymptotique des algorithmes génétiques”. PhD thesis, Université de Montpellier II (1994).
- [17] F. Cérou, F. LeGland, N.J. Newton, “Stochastic Particle Methods for Linear Tangent Filtering Equations, in Optimal Control and PDE’s” dans *Innovations and Applications, in honor of Alain Bensoussan’s 60th anniversary*. Editeurs : J.L. Menaldi, E. Rofman, A. Sulem, pp. 231-240, IOS Press, Amsterdam, (2001).
- [18] B. Chakraborty, P. Chaudhuri, “On a transformation and re-transformation technique for constructing an affine equivariant multivariate median”. Proceedings of the American Mathematical Society, vol.124, n°8 (1996).
- [19] M. Chaleyat-Maurel, D. Michel, “Des résultats de non existence de filtre de dimension finie”. Stochastics, vol. 13,83-102 (1984).
- [20] P. Chaudhuri, “On a geometric notion of quantiles for multivariate data.” Journal of the American Statistical Association, 91(434), p862-872 (1996).
- [21] G. Chen, *Approximate Kalman Filtering*. World Scientific, Approximations and Decompositions vol 2, (1993).
- [22] H.F. Chen, L. Guo, A.J. Gao, “Convergence and robustness of the Robbins-Monro algorithm truncated at randomly varying bounds”, Stoch. Proc. Appl. 27, No2, p217-231, (1988).

- [23] D.E. Contois, "Relationship between population density and specific growth rate of continuous culture", *J. de Génie Microbiologique*, vol 21, p40-50,(1959).
- [24] D. Crisan, P. Del Moral, T.J. Lyons, "Non linear filtering using branching and interacting particle systems". *Markov Processes Related Fields*, 5(3), p293-319 (1999).
- [25] G. Cybenko, "Approximation by superpositions of sigmoidal functions". *Mathematics of control, signals and systems*, 2,2,159-169 (1989).
- [26] M. Davis, "New Approach to Filtering nonlinear Systems". *IEEE Proceedings, Part D*, vol. 128, no. 5, p166-172 (1981).
- [27] G. Dal Maso, *An introduction to  $\Gamma$ -convergence*. Birkhäuser, Basel (1993).
- [28] P. Del Moral, *Feynman-Kac Formulae. Genealogical and Interacting Particle Systems with Applications*. Springer-Verlag New York (2004)
- [29] P. Del Moral, "Arbres généalogiques et estimation non linéaire". Actes des XXXVI<sup>mes</sup> Journées de Statistique, Montpellier, mai (2004).
- [30] P. Del Moral, M. Ledoux, L. Miclo, "On contraction properties of Markov kernels". *Probab. theory Relat. Fields*, 126, p395-420 (2003).
- [31] P. Del Moral, A. Doucet, "On a Class of Genealogical and Interacting Metropolis Models". Séminaire de Probabilité XXXVII, Ed. J-Azéma, M. Emery, M. Ledoux et M. YOr, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag Berlin, vol. 1832, p415-446 (2003)
- [32] P. Del Moral, J. Jacod, P. Protter, "The Monte-Carlo method for filtering with discrete-time observations". *Probab Theory Relat. Fields* 120, p346-368 (2001).
- [33] P. Del Moral, J. Jacod, "Interacting Particle Filtering With Discrete Observation". In *Sequential Monte Carlo Methods in Practice* Ed. A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon. *Statistics for Engineering and Information Science*, Springer, p43-75 (2001).
- [34] P. Del Moral, L. Miclo, "Branching and Interacting Particle Systems Approximations of Feynman-Kac Formulae with applications to Non-Linear Filtering". Séminaire de Probabilité XXXIV, Ed. J. Azéma, M. Emery, M. Ledoux et M. YOr, *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag Berlin, vol. 1729, p1-145 (2000).

- [35] P. Del Moral, L. Miclo, "On the convergence and the applications of the generalized simulated annealing". *SIAM J. Control Optim.*, 37(4), p1222-1250 (1999).
- [36] P. Del Moral, A. Guionnet, "Central limit theorem for nonlinear filtering and interacting particle systems". *The Annals of Applied Probability*, vol. 9, No2, p275-297 (1999).
- [37] P. Del Moral, A. Guionnet, "Large Deviations for Interacting Particle Systems. Applications to Non Linear Filtering". *Stochastic Processes and their applications*, 78(1), p69-95 (1998).
- [38] P. Del Moral, "Measure-valued processes and interacting particule systems. Application to nonlinear filtering problems". *The Annals of Applied Probability*, vol. 8, No2, 438-495 (1998).
- [39] P. Del Moral, "A uniform convergence theorem for the numerical solving of the nonlinear filtering problem." *Journal of Applied Probability*, 35(4) :873-884 (1998).
- [40] P. Del Moral, "Nonlinear filtering : Interacting particule resolution". *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 325, Série I, 653-658 (1997).
- [41] P. Del Moral, "Nonlinear filtering : Interacting Particle Solution". *Markov Processes and Related Fields*, 2(4), 555-580 (1996).
- [42] P. Del Moral, "Nonlinear filtering using random particles". *Theory Probab. Appl* Vol40 No4 (1995)
- [43] P. Del Moral, G. Salut, "Filtrage non-linéaire : résolution particulière à la Monte Carlo". *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 320, Série I, p1147-1152 (1995).
- [44] P. Del Moral, G. Rigal, G. Salut, "Estimation et commande optimale non linéaire : un cadre unifié pour la résolution particulière". *Rapport technique 2*, LAAS/CNRS, contrat DRET-DIGILOG, Toulouse, mars (1992).
- [45] B. Delyon, "General results on the Convergence of Stochastic Algorithms", *IEEE-A.C.*, vol41, No9, p.1245-1255, (1996)
- [46] B. Delyon, "Stochastic approximation with decreasing gain : Convergence and asymptotic theory", cours DEA, Université de Rennes I, <http://name.math.univ-rennes1.fr/bernard.delyon/cours.html>, (2000).
- [47] L. Devroye, *A Course in Density Estimation*. Birkhäuser, Boston (1987).
- [48] L. Devroye, "The equivalence of weak, strong and complete convergence in L1 for kernel density estimates". *Ann. Statist.*, vol 11, 896-904 (1983)

- [49] L. Devroye, "Recursive estimation of the mode of a multivariate density". *The Canadian Journal of Statistics*, vol. 7, No2, p. 159–167, (1979).
- [50] L. Devroye, L. Györfi, G. Lugosi *A Probabilistic Theory of Pattern Recognition*. Application of Mathematics. Stochastics Modelling and Applied Probability. Springer-Verlag, New York (1996).
- [51] L. Devroye, L. Györfi, *Nonparametric density estimation. The  $L_1$  view*. John Wiley, New York (1985).
- [52] L. Devroye, T.J. Wagner, "Nonparametric discrimination and density estimation". Technical Report no. 183, University of Texas, Austin (1976).
- [53] J.L. Doob "Application of the theory of martingales". Colloque international CNRS, Paris, p22-28 (1949).
- [54] J.L. Doob *Stochastic Processes*. John Wiley, New York (1953).
- [55] A. Doucet, V.B. Tadić, "Parameter Estimation in General State-Space Models using Particle Methods". *Ann. Inst. Stat. Math.*, vol. 55, no. 2, pp. 409-422, (2003).
- [56] A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*. Statistics for Engineering and Information Science, Springer (2001).
- [57] A. Doucet, S. Godsill, C. Andrieu, "On Sequential Monte Carlo Sampling Methods for Bayesian Filtering". *Statistics and Computing*, vol. 10, no. 3, p197-208 (2000).
- [58] A. Doucet, "On Sequential Simulation-Based Methods for Bayesian Filtering". Technical report CUED/F-INFENG/TR.310, University of Cambridge (1998).
- [59] A. Doucet, "Algorithmes Monte Carlo pour l'estimation bayésienne de modèles markoviens cachés. Application au traitement de signaux de rayonnements." PhD thesis, Université de Paris-Sud, Orsay (1997).
- [60] W.F. Eddy, "Optimum kernel estimators of the mode". *Ann. Statist.*, vol. 8, No4, p870-882 (1980).
- [61] V. Fabian, "Stochastic Approximation of Minima with Improved Asymptotic Speed". *Ann. Math. Statist.*, 38, 191-200 (1967).
- [62] F. Ferraty, P. Vieu, "Modèles Non-Paramétriques de Régression". Notes de cours de DEA, Université Paul Sabatier, Toulouse (2003).
- [63] C. Geyer, "Estimation and optimization of functions" dans *Markov Chain Monte Carlo in practice*, Editeurs : W.R. Gilks, S. Richardson, D.J. Spiegelhalter, Chapman & Hall, London, p241-258, (1996).

- [64] J. Geweke, "Bayesian Inference in Econometrics Models using Monte Carlo Integration", *Econometrica*, vol. 57, p1317-1339 (1989).
- [65] W.R. Gilks, C. Berzuini, "Following a moving target-Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models". *J. R. Statist. Soc. B*, 63(1), p127-146 (2001).
- [66] N. Glick, "Consistency conditions for probability estimators and integrals of density estimators". *Utilitas Mathematica*, vol. 6, p61-74 (1974)
- [67] N.J. Gordon, "A Hybrid Bootstrap Filter for Target Tracking in Clutter". *IEEE Trans. on aerospace and electronic systems*, vol. 33, no. 1 (1997).
- [68] N.J. Gordon, D.J. Salmond, A.F.M Smith, "Novel approach to nonlinear/non-Gaussian Bayesian state estimation". *IEE Proceedings-F*, vol. 140, no. 2 (1993).
- [69] L. Györfi, W. Härdle, P. Sarda, P. Vieu, *Nonparametric Curve Estimation from Time Series*. Lecture Notes in Statistics 60, Springer-Verlag (1989).
- [70] J.B.S. Haldane, *Enzymes*. Longmans, Londres, (1930).
- [71] J.E. Handschin, "Monte Carlo Techniques for Prediction and Filtering of Non-Linear Stochastic Processes". *Automatica*, no. 6, p555-563 (1970).
- [72] S. Haykin, *Kalman Filtering and neural networks*. Wiley, (2001).
- [73] S. Haykin, P. Yee, E. Derbez, "Optimum Nonlinear Filtering". *IEEE Transaction on signal processing*, vol. 45, No11 (1997).
- [74] T. Higuchi, "Monte Carlo filter using the genetic algorithm operators". *J. Stat. Comput. Simulation*, 59(1)1, p1-23 (1997).
- [75] N. Hilgert, "Identification et contrôle de processus autorégressifs non linéaires incertains : application à des procédés biotechnologiques". PhD thesis, Université de Paris-sud, centre d'Orsay (1997).
- [76] N. Hilgert, R. Senoussi, J.P. Vila "Nonparametric identification of controlled nonlinear time varying processes". *SIAM J. on Control and Optimization*, 39, p950-960, (2000).
- [77] J.H. Holland, *Adaptation in Natural and Artificial Systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor (1995).
- [78] L. Holmström, J. Klemelä, "Asymptotic Bounds for the Excepted  $L^1$  Error of a Multivariate Kernel Density Estimator". *Journal of Multivariate Analysis*, 42, p245-266 (1992).

- [79] Hornick, Stinchcombe, H. White, "Multilayer Feedforward Net works are Universal Approximators". *Neural Networks*, vol. 2, 359-366 (1990).
- [80] M. Hürzeler, "Statistical Methods for General State-Space Models". PhD thesis, Departement of Mathematics, ETH Zürich (1998).
- [81] M. Hürzeler, H.R. Künsch, "Monte Carlo Approximations for General State-Space Models". *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol.7, n°2, p175-193 (1998).
- [82] M. Hürzeler, H.R. Künsch, "Approximating and Maximising the Likelihood for a General State-Space Model" dans *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Editeurs : A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, Statistics for Engineering and Information Science, Springer-Verlag, New York, p159-175, (2001).
- [83] A. H. Jazwinski, *Stochastic processes and filtering theory*. Academic press, (1970).
- [84] R.E. Kalman, "A new approach to linear filtering and prediction theory". *Transaction of the ASME, Journal of Basic Engineering*, 82, 34-45 (1960).
- [85] J.H.B. Kemperman, "The median of a finite measure on a Banach space". *Statistical Data Analysis Based on the  $L_1$  Norm and Related Methods*, ed. Y. Dodge, Amsterdam, p217-230 (1987).
- [86] J. Kiefer, J. Wolfowitz, "Stochastic Estimation of the Maximum of a Regression Function". *Ann. Math. Statist.*, 23, 457-461 (1952).
- [87] G. Kitagawa, "Non-Gaussian State-Space Modeling of Nonstationary Time Series". *Journal of the American Statistical Association*, 82(400), p1032-1041 (1987).
- [88] G. Kitagawa, "Monte Carlo Filter and Smoother for Non-Gaussian Nonlinear State Space Models". *Journal of Computational and Graphical Statistics*, vol.5, n°1, p1-25 (1996).
- [89] G. Kitagawa, "A self-organisation state-space model". *Journal of the American Statistical Association*, 93(443), p1203-1215 (1998).
- [90] L.A. Klimko, P.I. Nelson, "On conditional least squares estimation for stochastic processes". *Ann. Statist.*, vol. 6, No3, 629-642 (1978).
- [91] A. Kolmogorov, S. Fomine, *Eléments de la théorie des fonctions et de l'analyse fonctionnelle*. Editions MIR, Moscou (1977).

- [92] A. Kong, J.S. Liu, W.H. Wong, "Sequential Imputations and Bayesian Missing Data Problems". *Journal of the American Statistical Association*, 89(425), p278-288, (1994).
- [93] J. Leclerc, D. Pierre-Loti-Viaud, "Vitesse de convergence presque sûre de l'estimateur à noyau du mode." *C. R. Acad. Sci. Paris*, t. 331, Série 1, p637-640, (2000).
- [94] F. LeGland, "Introduction au filtrage en temps discret. Filtre de Kalman-Modèles de Markov cachés". cours DEA stir, Université Rennes I, (2000).
- [95] F. LeGland, N. Oudjane, "Stability and Uniform Approximation of Nonlinear Filters using the Hilbert Metric, and Application to Particle Filters". *The Annals of Applied Probability*, 14, 1, pp. 144-187, (2004).
- [96] J.S. Liu, "Metropolized Independent Sampling with Comparisons to Rejection Sampling and Importance Sampling". *Stat. Comp.*, vol. 6, p113-119 (1996).
- [97] J.S. Liu, R. Chen, "Sequential Monte Carlo Methods for Dynamic Systems". *Journal of the American Statistical Association*, 93(443), p1032-1044 (1998).
- [98] J. Liu, M. West, "Combined Parameter and State Estimation in Simulation-Based Filtering", dans *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Editeurs : A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, Statistics for Engineering and Information Science, Springer-Verlag, New York, p197-223 (2001).
- [99] J.T. Lo, "Synthetic Approach to Optimal Filtering". *IEEE Transaction on neural networks*, vol. 5, No5 (1994).
- [100] P. Milasevic, G.R. Ducharme, "Uniqueness of the spatial median". *Ann. Statist.*, vol. 15, No3, 1332-1333 (1987).
- [101] J. Monod, *Recherches sur la Croissance des Cultures Bactériennes*, Hermann & Cie, Paris (1942).
- [102] C. Musso, N. Oudjane, F. LeGland, N. Oudjane, "Improving Regularised Particle Filters", dans *Sequential Monte Carlo Methods in Practice*, Editeurs : A. Doucet, N. de Freitas, N. Gordon, Statistics for Engineering and Information Science, Springer-Verlag, New York, p247-271 (2001).
- [103] M.L.A. Netto, L. Gimeno, M.J. Mendes, "Nonlinear filtering of discrete time systems". *Proceedings of the 4th IFAC Symposium on Identification and System Parameter Estimation*, Tbilisi, USSR, p2123-2130 (1978).

- [104] N. Oudjane, “Stabilité et approximations particulières en filtrage non linéaires, application au pistage”. PhD thesis, Université de Rennes I (2000).
- [105] T. Parisini, R. Zoppoli, “Neural networks for nonlinear state estimation”. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, 231-248 (1994).
- [106] E. Parzen, “On estimation of a probability density function and mode”. *Ann. Math. Statist.*, 33, p1065-1076 (1962).
- [107] B.A. Pearlmutter, “Learning State Space Trajectories in Recurrent Neural Networks”. *Neural Computation* 1, 263-269 (1989).
- [108] J. Picard, “Efficiency of the Extended Kalman Filter for non linear systems with small noise”. Rapport de recherche INRIA, Sophia Antipolis (1989).
- [109] M.K. Pitt, N. Shephard, “Filtering via Simulation : Auxiliary Particle Filters”. *Journal of the American Statistical Association*, 94(446), p590-599 (1999).
- [110] B.L.S Prakasa Rao, *Non Parametric Functionnal Estimation*. Probability and Mathematical Statistics, Academic Press, Orlando (1983).
- [111] H. Robbins, S. Monro, “A Stochastic Approximation Method”. *Ann. Math. Statist.*, 22, 400-407 (1951).
- [112] C. Robert, *L'Analyse Statistique Bayésienne*. Economica, Paris (1992).
- [113] R.T. Rockafellar, R. J-B. Wets *Variational Analysis*. Springer-Verlag, Berlin (1998).
- [114] J.P. Romano, “On weak convergence and optimality of kernel density estimates of the mode”. *Ann. Statist.*, vol. 16, No2, p629-647 (1988).
- [115] T.W. Sager, “Estimating modes and isopleths”. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, vol. 12, No5, p529-557, (1983).
- [116] M. Samanata, “Nonparametric estimation of the mode of a multivariate density”. *South African Statistical Journal*, vol. 7, p109-117, (1979).
- [117] M. Samanata, A. Thavasneswaran, “Non-parametric estimation of the conditional mode”. *Communications in Statistics, Theory and Methods*, vol. 19, p4515-4524, (1990).
- [118] P. Sarda, P. Vieu, *Kernel Regression. Smoothing and Regression : Approaches, computation and application*. Ed M.G. Schimek, Wiley Series in Probability and Statistics, p43-70 (2000).
- [119] M.J. Schervish, *Theory of statistics*, Springer-Verlag, New York (1995).

- [120] L. Schwartz, "On Bayes Procedures", *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie* 4, 10-26 (1965).
- [121] H.L. Smith, P. Waltman, "The theory of the chemostat : Dynamics of microbial competition", Cambridge University Press, Cambridge, (1995).
- [122] J-P Steyer, J-C Bouvier, T. Conte, P. Gras, P. Sousbie, "Evaluation of four year experience with a fully instrumented anaerobic digestion process". *Water Science and Technology*, vol. 45, no. 4-5, p495-502, (2002).
- [123] W. F. Stout, *Almost sure convergence*. Academic press, (1974).
- [124] H. Tong, *Non-linear Times Series, A Dynamical System Approach*. Oxford statistical science series, Oxford (1993).
- [125] D. Urbani, "Méthodes statistiques de sélection d'architectures neuronales : application à la conception de modèles de processus dynamiques". PhD thesis, Université Paris 6 (1995).
- [126] P. Vieu, "A note on density mode estimation". *Statistics and Probability Letters*, 26, p297-307 (1996).
- [127] V. Wagner, "Identification Non Paramétrique et Contrôle Prédictif Neuronal de Processus Non Linéaires Incertains de Type Biotechnologique : Application à un Procédé de Dépollution Biologique". PhD thesis, Ecole Nationale Supérieure Agronomique de Montpellier (2001).
- [128] E.A. Wan, A.T. Nelson, "Dual Kalman filtering methods for nonlinear prediction, estimation and smoothing". *Advances in Neural Information Processing Systems* 9, Cambridge, MA :MIT Press (1997).
- [129] G.R. Warnes, "The Normal Kernel Coupler : An adaptive Markov Chain Monte Carlo method for efficiently sampling from multi-modal distributions". Technical Report no. 39, Department of Statistics, University of Washington. (2001).
- [130] P.J. Werbos, "Generalisation of Backpropagation with Application to a Recurrent Gas Market Model". *Neural Networks*, vol. 1, 339-356 (1988).
- [131] M. West, "Approximating posterior distribution by mixture", *Journal of the Royal Statistical Society (ser :B)*, vol. 55, p409-422 (1993).
- [132] L. Xu, A. Krzyżak, A. Yuille, "On Radial Basis Function Nets and Kernel Regression : Statistical Consistency, Convergence Rates and Receptive Field Size". *Neural Networks*, vol. 7, No4, 609-628 (1994).
- [133] P.V. Yee, S. Haykin, *Regularised radial basis function networks, Theory and Application*. Wiley, New York (2001).

- [134] E. Youndjé, “Estimation non paramétrique de la densité conditionnelle par la méthode du noyau”. PhD thesis, Université de Rouen (1993).
- [135] E. Youndjé, “Propriétés de convergence de l’estimateur à noyau de la densité conditionnelle”. Publication URA CNRS D1378 (1993).